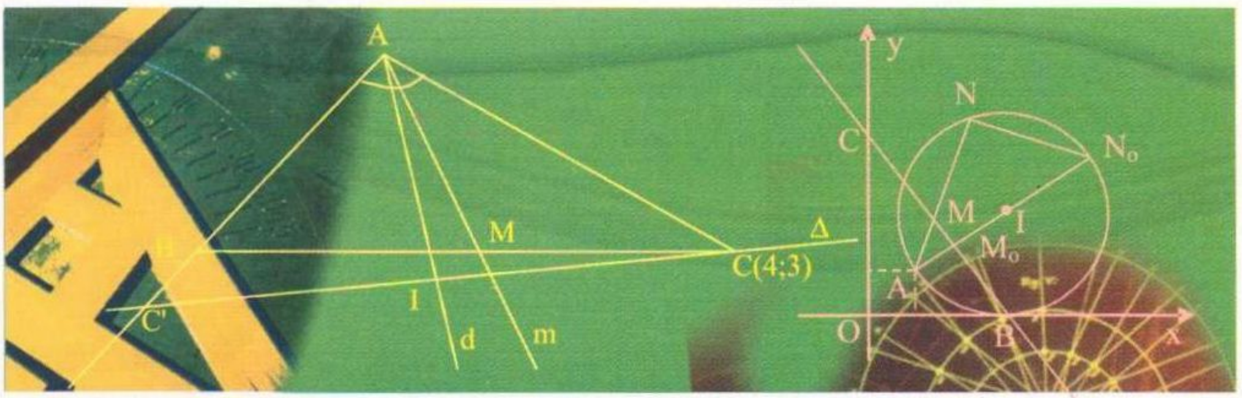
Th.S Lê Thị Hương
Th.S Nguyễn Kiếm, Th.S Hồ Xuân Thắng

PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

TRONG MẶT PHẲNG



- Bồi dưỡng và nâng cao kĩ năng giải toán
- Dành cho học sinh ban cơ bản và ban KHTN ôn luyện và chuẩn bị cho các kì thi quốc gia (Tốt nghiệp, Tuyển sinh...) do bộ GD&ĐT tổ chức.

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S Lê Thị Hương
Th.S Nguyễn Kiếm, Th.S Hồ Xuân Thắng

PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG

- Bồi dưỡng và nâng cao kĩ năng giải toán
- Dành cho học sinh ban cơ bản và ban KHTN ôn luyện và chuẩn b
  cho các kì thi quốc gia (Tốt nghiệp, Tuyển sinh...) do bộ GD&ĐT tổ chức.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
BÍCH HẠNH
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG
Mã số: 1L-482ĐH2010
In 1.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Song Nguyên
Số xuất bản: 871-2010/CXB/8-151/ĐHQGHN, ngày 31/08/2010
Quyết định xuất bản số: 482LK-XH/QĐ-NXBĐHQGHN
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm giúp các em học sinh có thêm tư liệu rèn luyện kỹ năng giải toán THPT và chuẩn bị cho các kỳ thi quốc gia (tốt nghiệp, tuyển sinh) do bộ GD& ĐT tổ chức, nhóm tác giả ThS. Lê Thị Hương, ThS. Nguyễn Kiếm, ThS. Hồ Xuân Thắng đã tổ chức biên soạn bộ sách *"Phân loại và phương pháp giải toán"*.

"Phân loại và phương pháp giải toán hình học trong mặt phẳng " là một tập sách trong bộ này. Nội dung kiến thức về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng bám sát chương trình toán THPT (Chương trình chuẩn- nâng cao).

Các tác giả trình bày một cách có hệ thống để học sinh nắm vững phương pháp giải các dạng toán mẫu mực điển hình, thường xuất hiện trong các kỳ thi ĐH- CĐ...Cùng với các lời giải giản dị, dễ hiểu còn có các lời giải độc đáo, mang tính tìm tòi, sáng tạo...

Với các dạng toán đa dạng, phong phú đã được phân loại trong tập sách này, chúng tôi tin rằng đây sẽ là tài liệu cần thiết cho các bạn học sinh trong việc rèn luyện kỹ năng giải toán và chuẩn bị ôn thi của mình.

Trong quá trình biên soạn, mặt dù các tác giả đã cố gắng nhưng tập sách vẫn có thể còn những khiếm khuyết. Chúng tôi rất mong nhận được những góp ý chân thành của các thầy, cô giáo, các bạn học sinh để trong lần tái bản sau, tập sách sẽ được hoàn chỉnh hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- **Trung tâm sách giáo dục Anpha**
  225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
- **Công ti sách - thiết bị giáo dục Anpha**
  50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, Tp. HCM.
  ĐT: 08. 62676463, 38547464 .
  Email: alphabookcenter@yahoo.com

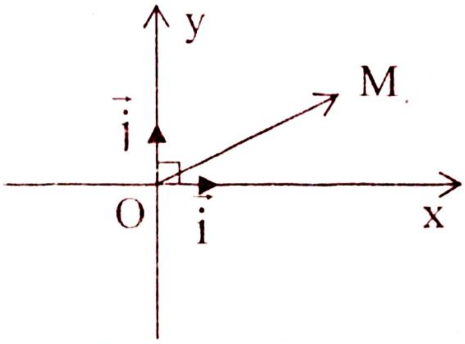
Xin chân thành cám ơn!

Tác giả

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Tọa độ của một điểm và véc tơ

– Hệ trục Oxy gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$



$\left(\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1\right)$ và $\vec{i} \perp \vec{j}$

– $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

– $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

$k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$; $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\vec{a} . \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$, $\quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

– Cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq 1$)

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$$

$$\text{Khi M là trung điểm của đoạn thẳng AB: } \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

– Cho tam giác ABC, $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Gọi $G(x_G; y_{GG})$ là trọng tâm của tam giác

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

4. Biểu thức giải tích của phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quuay, phép vị tự

– Phép tịnh tiến $T_{\vec{a}} : M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{a} = (a_1;a_2)$ thì $\begin{cases} x' = x + + a_1 \\ y' = y + + a_2 \end{cases}$

– Phép đối xứng qua đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$

$$S_\Delta : M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

– Phép quay tâm $I(x_0; y_0)$, góc quay φ:

$$Q_{(I;\varphi)} : M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi + y_0 \end{cases}$$

– Phép vị tự tâm $I(x_0; y_0)$, tỉ số k:

$$V_{(I;k)} : M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

5. Phương trình đường thẳng

– Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o; y_o)$ và nhận $\vec{n} = (A;B)$ với $A^2 + B^{22} \neq 0$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình: $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$

– Phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$ gọi là phương ttrình tổng quát của đường thẳng có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B)$ và véc tơơ chỉ phương $\vec{a} = (-B;A)$

– Đường thẳng đi qua hai điểm A(a;0) và B(0;b) với $a.b \neq 0$ có phuương trình $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ gọi là phương trình theo đoạn chắn

– Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_{oo})$ và nhận vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2)$ là: $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ với $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

– Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2)$ là: $\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$ với $a_1.a_2 \neq 0$

– Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_o)$, có hệ số góc k:

$$y = k(x - x_o) + y_o$$

6. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng: Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Đặt: $D = A_1B_2 - A_2B_1$; $D_x = B_1C_2 - B_2C_1$; $D_y = C_1A_2 - C_2A_1$

Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow D \neq 0$

$$\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \text{ hoặc } D_y \neq 0 \end{cases}$$

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$

Đặc biệt: khi A_2, B_2, C_2 khác 0 ta có: Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

$\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ và $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

7. Góc và khoảng cách

– Cho hai đường thẳng: Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Gọi φ là góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 thì $0^o \leq \varphi \leq 90^o$,

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

– Khoảng cách từ một điểm $M_o(x_o;y_o)$ đến đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$ cho bởi công thức:

$$d(M_o,\Delta) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8. Vị trí của hai điểm $M(x_M;\ y_M)$, $N(x_N;\ y_N)$ đối với đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$

– Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0$$

– Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0$$

– Phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng:

Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

§2. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM, MỘT VÉC TƠ

1. Tìm toạ độ của một điểm, của một vectơ

Phương pháp:

– Để tìm toạ độ của điểm M(x;y) hay vectơ $\vec{a} = (x;y)$ ta tìm những hệ thức vectơ để lập một hệ phương trình hai ẩn x, y

– Những hệ thức được lập thông qua biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho $\vec{a} = (2;4)$, $\vec{b} = (-3;1)$, $\vec{c} = (5,-2)$. Tìm toạ độ của vectơ

a. $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ b. $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

Giải

a. Gọi $\vec{m} = (x;y)$

$\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ suy ra $\begin{cases} x = 2.2 + 3(-3) \\ y = 2.4 + 3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 11 \end{cases}$ nên $\vec{m} = (-5;11)$

b. Gọi $\vec{n} = (x;y)$

$\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ suy ra $\begin{cases} x = 3.2 - 2(-3) + 5 \\ y = 3.4 - 2.1 + (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}$ nên $\vec{n} = (17;8)$

Bài 2. Cho ba điểm không thẳng hàng A(2;1), B(2;–1), C(–2;–3)

a. Tìm toạ độ điểm D để ABCD là hình bình hành

b. Tìm toạ độ tâm M của hình bình hành ABCD

c. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc A' của A lên BC

Giải

a. Gọi D(x;y). Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2 = -2 - x \\ -1 - 1 = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$ nên D(–2;–1)

b. Gọi M(x;y) là tâm của hình bình hành ABCD thì M là trung điểm của đoạn thẳng AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y = \dfrac{1 + (-3)}{2} = -1 \end{cases}$$ nên M(0;–1)

c. Gọi A'(x;y) là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} // \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} // \overrightarrow{BC} \end{cases}$

$\overrightarrow{AA'} = (x - 2; y - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-4; -2)$, $\overrightarrow{BA'} = (x - 2; y + 1)$

Thay vào: $\begin{cases} (x-2)(-4) + (y-1)(-2) = 0 \\ (x-2)(-2) - (y+1)(-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$ nên

$A'\left(\dfrac{14}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$

Bài 3. Cho các điểm A(2;3), B(9;4), M(5;y) và P(x;2)

a. Tìm y để tam giác AMB vuông tại M.

b. Tìm x để ba điểm A, P, B thẳng hàng.

Giải

a. Ta có $\overrightarrow{MA} = (-3; 3 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (4; 4 - y)$

ΔAMB vuông tại M khi $MA \perp MB \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow -12 + (3 - y)(4 - y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = 7$

b. $\overrightarrow{AB} = (7;1)$ và $\overrightarrow{AP} = (x - 2; -1)$

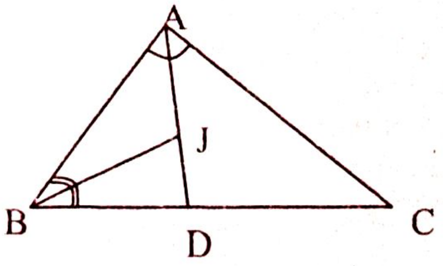
A, B, P thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow 7(-1) - 1(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -5$

2. Tìm toạ độ các điểm đặc biệt của tam giác

Phương pháp:

1. G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$



2. H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

3. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

4. D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC khi $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{AB}{AC}$

5. J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ⇔ J là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABD ⇔ $\frac{\overline{JA}}{\overline{JD}} = -\frac{BA}{BD}$

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho tam giác ABC có A(2;6), B(−3;−4) và C(5;0)

a. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.Chứng minh I, G, H thẳng hàng và IH = 3IG

b. Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Giải

a. Ta có $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2-3+5}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6-4+0}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$

Xét điểm H(x;y) ta có $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-6)$, $\overrightarrow{BC} = (8;4)$, $\overrightarrow{BH} = (x+3; y+4)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-6)$

H là trực tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x-2)+4(y-6)=0 \\ 3(x+3)-6(y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$$

Trực tâm tam giác ABC là H(5;0)

Gọi I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ⇔ $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)^2 + (6-y)^2 = (-3-x)^2 + (-4-y)^2 \\ (2-x)^2 + (6-y)^2 = (5-x)^2 + (0-y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x-4y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-\frac{1}{2};1)$

Ta có $\overrightarrow{IH} = \left(\frac{11}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{IG} = \left(\frac{11}{6};-\frac{1}{3}\right)$ $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow$I, G, H thẳng hàng và IH = 3IG

Cách khác: Ta có: $\overrightarrow{CA} = (-3;6), \overrightarrow{CB} = (-8;-4) \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ nên trực tâm $H \equiv C$

Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm $I(-\frac{1}{2};1)$ của AB, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right) \in CI$ và $IC = 3IG$

b. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC

Ta có: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}$, $AB = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ và $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + \frac{5}{3}x_C}{1 + \frac{5}{3}} = \dfrac{-3 + \frac{5}{3}.5}{\frac{8}{3}} = 2 \\ y_D = \dfrac{y_B + \frac{5}{3}y_C}{1 + \frac{5}{3}} = \dfrac{-4 + \frac{5}{3}.0}{\frac{8}{3}} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

nên $D\left(2;-\frac{3}{2}\right)$

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi $\frac{\overline{JA}}{\overline{JD}} = -\frac{BA}{BD}$

Ta có: $BD = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ nên $\frac{BA}{BD} = 2$

$$\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \dfrac{x_A + 2x_D}{1+2} = \dfrac{2 + 2.2}{3} = 2 \\ y_J = \dfrac{y_A + 2y_D}{1+2} = \dfrac{6 + 2(-\frac{3}{2})}{3} = 1 \end{cases}$$

Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là J(2;1)

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(1;1). Tìm điểm B trên đường thẳng y = 3 và điểm C trên trục hoành sao cho ABC là tam giác đều

Giải

Gọi $B(x_B; 3)$ thuộc đường thẳng y = 3 và điểm $C(x_C; 0)$ thuộc trục hoành và M là trung điểm của AC.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1 + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1+x_C}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} BM \perp AC \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases}$ (*)

Ta có: $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{1+x_C}{2} - x_B; -\frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (x_C - 1; -1)$ và $\overrightarrow{AB} = (x_B - 1; 2)$

Thay vào (*), ta có:

$$\begin{cases} \left(\frac{1+x_C}{2} - x_B\right)(x_C - 1) + \frac{5}{2} = 0 \\ (x_B - 1)^2 + 4 = (x_C - 1)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + x_C - 2x_B)(x_C - 1) + 5 = 0 \\ (x_B - 1)^2 = (x_C - 1)^2 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_C^2 + 4}{2(x_C - 1)} \\ 3(x_C - 1)^4 - 22(x_C - 1)^2 - 25 = 0 \end{cases} \quad \text{với } x_C \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_C^2 + 4}{2(x_C - 1)} \\ (x_C - 1)^2 = \frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 + \frac{5}{\sqrt{3}} \\ x_B = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x_C = 1 - \frac{5}{\sqrt{3}} \\ x_B = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

* Khi $x_C = 1$ thì $\overrightarrow{BM} = \left(1 - x_B; -\frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -1)$ và $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2} \neq 0 \Rightarrow$ MB không vuông góc với AC nên ΔABC không phải là tam giác cân

* Tọa độ các điểm $B\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 3\right), C\left(1 + \frac{5}{\sqrt{3}}; 0\right)$ hoặc $B\left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 3\right), C\left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}}; 0\right)$

3. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng d cho trước

Phương pháp:

1. Chuyển phương trình đường thẳng d về dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
2. Gọi $M(x_0 + at; y_0 + bt)$ và từ giả thiết bài toán ta lập được một phương trình theo ẩn t, giải tìm t, từ đó tìm được M.
3. Ngoài ra ta có thể gọi $M\left(x; -\frac{Ax + C}{B}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{By + C}{A}; y\right)$ khi d: $Ax + By + C = 0$ với $B \neq 0$, $A \neq 0$

Bài tập mẫu

Bài 1. (B – 2004) Cho hai điểm A(1;1), B(4;–3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng d: x – 2y – 1 = 0 sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Giải

Phương trình đường thẳng AB: $4x + 3y - 7 = 0$

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Gọi $C(2t + 1;t) \in d$

$$d(C,AB) = \frac{|4(2t+1) + 3t - 7|}{\sqrt{16+9}} = 6 \Leftrightarrow |11t - 3| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{27}{11} \end{array}\right.$$

Vậy: $C(7;3)$ hoặc $C\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right)$

Bài 2. (A. 2006). Cho các đường thẳng d_1: $x + y + 3 = 0$, d_2: $x - y - 4 = 0$, d_3: $x - 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

Giải

Gọi $M(2y;\ y) \in d_3$ và $d(M,d_1) = \frac{|2y + y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|3y + 3|}{\sqrt{2}}$,

$$d(M,d_2) = \frac{|2y - y - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|y - 4|}{\sqrt{2}}$$

Ta có: $d(M,d_1) = 2d(M,d_2) \Leftrightarrow \frac{|3y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{2|y - 4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -11 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Tọa độ điểm M: $M_1\ (-22;\ -11)$ hoặc $M_2(2;\ 1)$

4. Đối xứng

Phương pháp:

– Điểm A đối xứng với điểm B qua điểm I khi I là trung điểm của đoạn thẳng AB;

– Điểm A đối xứng với điểm B qua đường thẳng Δ khi AB vuông góc với Δ tại I và I là trung điểm của đoạn thẳng AB;

– Phép đối xứng trục(đối xứng tâm) biến một hình thành một hình bằng nó.

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho ba điểm $A(-1;\ -2)$, $B(4;\ -1)$, $C(3;\ 2)$ và đường thẳng Δ: $x - 2y - 2 = 0$

a. Chứng minh điểm A, B nằm cùng một phía đối với Δ

b. Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua Δ

c. Tìm trên Δ điểm M sao cho độ dài đường gấp khúc AMB ngắn nhất

d. Tìm trên Δ điểm N sao cho $\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

e. Tìm trên Δ điểm S sao cho $\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

f. Viết phương trình đường thẳng Δ_1 đối xứng với đường thẳng AC qua Δ

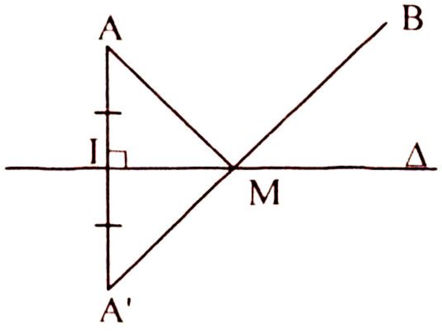
Giải

a. Ta có: $(x_A - 2y_A - 2)(x_B - 2y_B - 2) = (-1 + 4 - 2)(4 + 2 - 2) = 4 > 0$

$\Rightarrow$ A, B nằm cùng một phía đối với Δ

b. Gọi d là đường thẳng đi qua A, vuông góc với Δ có phương trình:

$2x + y + 4 = 0$



Gọi $I = d \cap \Delta$, toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} \\ y = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Điểm A' đối xứng với điểm A qua Δ thì I là trung điểm của AA'.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_I \\ y_A + y_{A'} = 2y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = -\dfrac{7}{5} \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = -\dfrac{6}{5} \end{cases}. \text{ Vậy: } A'\left(-\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right)$$

c. Ta có A' đối xứng với A qua Δ nên AM = A'M và AM + MB = A'M + MB ≥ A'B

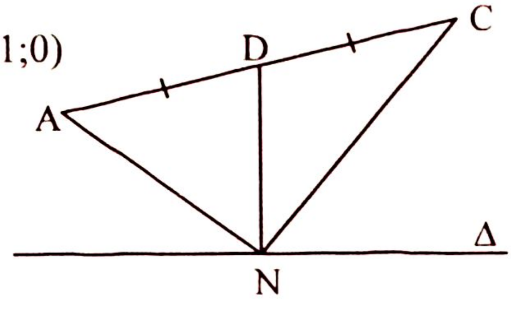
$\Rightarrow \min(MA + MB) = A'B$ khi A', M, B thẳng $\Rightarrow M = A'B \cap \Delta$

Phương trình đường thẳng A'B: $x - 27y - 31 = 0$

Toạ độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 27y - 31 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{25} \\ y = -\dfrac{29}{25} \end{cases}.$

Vậy: $M\left(-\frac{8}{25}; -\frac{29}{25}\right)$

d. Gọi D là trung điểm đoạn thẳng AC thì D(1;0)



$N \in \Delta$ ta có: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{ND}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{ND}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi đoạn thẳng ND ngắn nhất

Suy ra: $ND \perp \Delta$ tại N

Phương trình của đường thẳng d_1 đi qua D, vuông góc với Δ là:

$2x + y - 2 = 0$

$N = d_1 \cap \Delta$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

Vậy: $N\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

Cách khác: Gọi $N(2y + 2; y) \in \Delta$ và $\overrightarrow{NA} = (-2y-3; -2-y)$; $\overrightarrow{NC} = (1-2y; 2-y)$

và $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = (-4y-2; -2y) \Rightarrow \left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}\right| = 2\sqrt{5\left(y + \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5}}$

$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}\right| = 2\sqrt{5\left(y + \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5}} \ge \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ nên $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$y = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \dfrac{6}{5}$

$\Rightarrow N\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

e. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $G(2; -\dfrac{1}{3})$, $S \in \Delta$ ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} \Rightarrow |\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}| = 3|\overrightarrow{SG}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi đoạn thẳng SG ngắn nhất.

Suy ra $SG \perp \Delta$ tại S

Phương trình của đường thẳng d_2 đi qua G, vuông góc với Δ là:

$6x + 3y - 11 = 0$

$S = d_2 \cap \Delta$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 6x + 3y - 11 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{28}{15} \\ y = -\dfrac{1}{15} \end{cases}$

Vậy: $S\left(\dfrac{28}{15}; -\dfrac{1}{15}\right)$

Cách khác: Gọi $S(2y + 2; y) \in \Delta$ và $\overrightarrow{SA} = (-2y-3; -2-y)$, $\overrightarrow{SB} = (2-2y; -1-y)$, $\overrightarrow{SC} = (1-2y; 2-y)$

nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=(-6y;-3y-1)\Rightarrow|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}|=\sqrt{45y^2+6y+1}$

$$|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}|=\sqrt{45\left(y^2+\frac{2}{15}y+\frac{1}{225}\right)+\frac{4}{5}}=\sqrt{45\left(y+\frac{1}{15}\right)^2+\frac{4}{5}}\geq\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Nên $|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $y=-\frac{1}{15}\Rightarrow x=\frac{28}{15}$.

Vậy: $S\left(\frac{28}{15};-\frac{1}{15}\right)$

f. Phương trình của đường thẳng d_3 đi qua C, vuông góc với Δ là:

$2x+y-8=0$

$H=d_3\cap\Delta$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-8=0\\x-2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{18}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$

Điểm C' đối xứng với C qua Δ khi H là trung điểm của đoạn thẳng CC'

$\Rightarrow C'\left(\frac{21}{5};-\frac{2}{5}\right)$

Đường thẳng Δ_1 đối xứng với đường thẳng AC qua Δ thì Δ_1 đi qua điểm A' và C' và có phương trình là: $x-7y-7=0$

Bài 2. Cho hai điểm A(4; 3), B(2; −1) và đường thẳng $\Delta: 2x+y-5=0$

a. Chứng minh điểm A, B nằm khác phía đối với Δ

b. Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua Δ

c. Tìm trên Δ điểm M sao cho độ dài gấp khúc AM + MB ngắn nhất

d. Tìm trên Δ điểm N sao cho $|NA-NB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

a. Ta có: $(2x_A+y_A-5)(2x_B+y_B-5)=(8+3-5)(4-1-5)=-12<0$

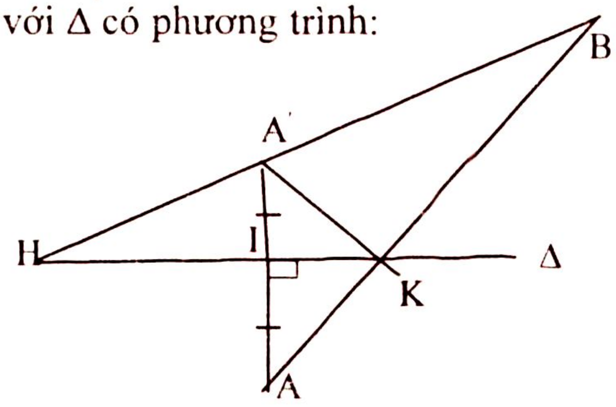
Suy ra: A, B nằm khác phía đối với Δ

b. Đường thẳng d đi qua A, vuông góc với Δ có phương trình:

$x-2y+2=0$

Gọi $I=d\cap\Delta$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}x-2y+2=0\\2x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{5}\\y=\frac{9}{5}\end{cases}$



Điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ thì $\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = -\dfrac{4}{5} \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = \dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Vậy $A'\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$

c. Phương trình đường thẳng (AB) là: 2x – y + 1 = 0

Gọi K = AB ∩ Δ, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\dfrac{5}{2};0\right)$$

∀M ∈Δ, ta có: MA + MB ≥ AB $\Rightarrow \min(MA + MB) = AB$ khi A, M, B thẳng hàng nên M ≡ K

d. Phương trình đường thẳng A'B: 4x + 7y – 1 = 0

Gọi H = A'B ∩ Δ, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 7y - 1 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{5} \\ y = -\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{17}{5};-\dfrac{9}{5}\right).$$

∀N∈Δ, $|NA - NB| = |NA' - NB| \le A'B \Rightarrow \max|NA - NB| = A'B$ khi N, A', B thẳng hàng nên N≡ H

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho ba điểm A(2;–1), B(0;3) và C(4;2)

a. Tìm toạ độ điểm M để $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

b. Tìm toạ độ điểm D trên Ox để ABCD là hình thang có một cạnh đáy là AB

c. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

d. Chứng minh ba điểm G, H, I thẳng hàng

Bài 2. (Khối A – 2004) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai điểm A(0;2) và B($-\sqrt{3}$;–1). Tìm toạ độ trực tâm và toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB

Bài 3. (Khối D – 2004) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh A(–1;0), B(4;0), C(0;m) với m ≠ 0. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G

Bài 4. Cho tam giác ABC có A(−8;3), B(4;12) và C(4;−13)

a. Tính các góc của tam giác ABC

b. Tìm toạ độ tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Bài 5. Cho bốn điểm A(10;5), B(3;2), C(6;−5) và D(12; $\sqrt{13}$). Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn, tìm toạ độ tâm của đường tròn đó.

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh A(0;2), B(−2;−2), C(4; −2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N là trung điểm của các cạnh AB, BC. Xác định tâm I và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN.

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 3 và hai đỉnh A(3;1), B(1;−3). Trọng tâm G của tam giác thuộc trục hoành. Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình thang cân ABCD đáy AD các đỉnh A(0;1), B(1;2), C(4; 3). Tìm tọa độ đỉnh D và tính diện tích hình thang đó.

Bài 9. Cho tam giác ABC, biết A(−1; 0), B(2; 3), C(3; −6) và đường thẳng d: x − 2y − 3 = 0.

a. Đường thẳng d cắt cạnh nào của tam giác.

b. Tìm điểm I thuộc d sao cho IA + IB nhỏ nhất.

c. Tìm điểm J thuộc d sao cho JA + JC nhỏ nhất

d. Tìm điểm H thuộc d sao cho $|HA - HC|$ lớn nhất.

e. Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 10. Tìm tọa độ điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng d: x − 2y + 3 = 0

Bài 11. Cho hai đường thẳng d_1: x − 2y − 3 = 0 và d_2: x + y + 1 = 0. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 12. Cho hai đường thẳng d_1: 2x − 3y +1 = 0 và d_2: 4x + y − 5 = 0 và điểm G(3; 5). Gọi A là giao điểm của d_1, d_2.

a. Tìm tọa độ điểm B thuộc d_1, C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC có trọng tâm là điểm G.

b. Viết phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng d_1 qua đường thẳng d_2.

Bài 13. (Dự bị D–07) Cho điểm A(2;1). Lấy B thuộc Ox có hoành độ không âm, C thuộc Oy có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm tọa độ các điểm B, C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 14.(Dự bị 04) Cho điểm A(0; 2) và đường thẳng d: $x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và AB = 2BC.

Hướng dẫn giải

Bài 1. a. Gọi M(x;y), ta có $\overrightarrow{AM} = (x - 2;\ y + 1)$, $\overrightarrow{BM} = (x;\ y - 3)$ và $\overrightarrow{CM} = (x - 4;\ y - 2)$

$$2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2) + 3x - 4(x-4) = 0 \\ 2(y+1) + 3(y-3) - 4(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 12 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy M(−12;−1)

b. Gọi D(x;0) thuộc Ox và $\overrightarrow{DC} = (4 - x;\ 2)$; $\overrightarrow{AB} = (-2;\ 4)$

ABCD là hình thang có một cạnh đáy AB. Suy ra:

$$\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = -2k \\ 2 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$ Vậy D(5;0)

c. Trọng tâm $G\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$; Trực tâm $H\left(\dfrac{18}{7};\dfrac{9}{7}\right)$; Tâm $I\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{19}{14}\right)$

d. $\overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{6}{7};-\dfrac{1}{14}\right)$ và $\overrightarrow{IG} = \left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{42}\right)$ nên $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow$ I, H, G thẳng hàng

Bài 2. Gọi H(x;y) là trực tâm của tam giác OAB thì:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{OA} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x - (y - 2) = 0 \\ 0(x + \sqrt{3}) + 2(y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(\sqrt{3};-1)$$

Gọi I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB thì

$$\begin{cases} IO = IA \\ IO = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OI^2 = IA^2 \\ OI^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (2 - y)^2 \\ x^2 + y^2 = (-\sqrt{3} - x)^2 + (-1 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy $I(-\sqrt{3};1)$

Bài 3. Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{m}{3} \end{cases}$.

Vậy $G(1;\dfrac{m}{3})$

Tam giác GAB vuông tại G $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0$

$\overrightarrow{GA} = \left(-2;-\dfrac{m}{3}\right), \overrightarrow{GB} = \left(3;-\dfrac{m}{3}\right)$ nên $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \dfrac{m^2}{9} = 0$

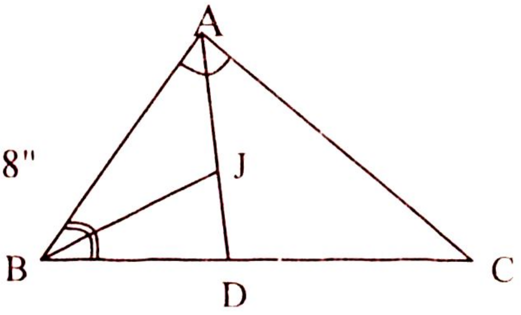
$\Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$

Bài 4. $\overrightarrow{AB} = (12;9)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-25)$, $\overrightarrow{AC} = (12;-16)$

a. $\cos\widehat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = 0$ suy ra $\widehat{A} = 90^0$

$\cos\widehat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{3}{5}$ suy ra $\widehat{B} \approx 53^07'48''$

$\widehat{C} = 90^0 - \widehat{B} = 36^052'11''$



b. AD phân giác góc A nên $D(4;\dfrac{9}{7})$

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC $\Rightarrow \dfrac{\overline{JA}}{\overline{JD}} = -\dfrac{BA}{BD} = -\dfrac{7}{5}$

$\Rightarrow J(-1;2)$

Bài 5. $\overrightarrow{BA} = (7;3)$, $\overrightarrow{BC} = (3;-7)$, $\overrightarrow{DA} = (-2;5-\sqrt{13})$, $\overrightarrow{DC} = (-6;-5-\sqrt{13})$

Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow BA \perp BC \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow DA \perp DC \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$

Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn đường kính AC. Tâm của đường tròn là trung điểm I đoạn thẳng AC $\Rightarrow$I(8; 0)

Bài 6. Gọi H(x; y), ta có: $\overrightarrow{BH} = (x+2;y+2)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-4)$; $\overrightarrow{AH} = (x;y-2)$

H là chân đường cao kẻ từ B của ΔABC nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} // \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) - 4(y+2) = 0 \\ 4(y-2) + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nên H(1; 1). M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC nên M(−1; 0), N(1; −2).

Gọi I(x, y) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN thì :

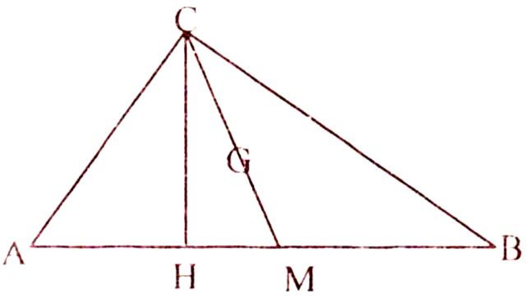
$$\begin{cases} IH^2 = IN^2 \\ IH^2 = IM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tâm $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = IM = \sqrt{\frac{5}{2}}$

Bài 7. Ta có: $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - x_C = 2(2 - x_G) \\ y_G - y_C = 2(-1 - y_G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - 4 \\ y_C = 2 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng AB:

2x − y − 5 = 0 và $AB = 2\sqrt{5}$.



Gọi $h = d(C, AB) = \dfrac{3|2x_G - 5|}{\sqrt{5}}$

$dt(\Delta ABC) = \dfrac{AB.h}{2} = 3 \Leftrightarrow |2x_G - 5| = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_G - 5 = 1 \\ 2x_G - 5 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_G = 3 \\ x_G = 2 \end{array}\right.$$

Tọa độ đỉnh C là C(5; 2) hoặc C(2; 2)

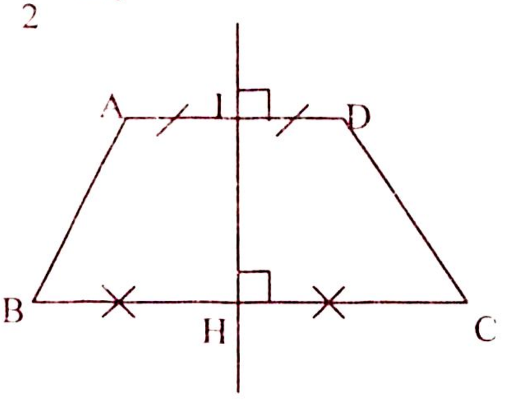
Bài 8. Gọi D(x; y), H, I lần lượt là trung điểm của BC, AD thì

$H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $I\left(\frac{x}{2};\frac{1+y}{2}\right)$

$\overrightarrow{BC} = (3;1); \overrightarrow{AD} = (x; y-1); \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{5-x}{2};\dfrac{4-y}{2}\right)$

Ta có tứ giác ABCD là hình thang cân có đáy AD thì

$$\begin{cases} \overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\dfrac{5-x}{2}\right) + \dfrac{4-y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{1} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 19 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{27}{5} \\ y = \dfrac{14}{5} \end{cases}.$$

Vậy đỉnh $D\left(\frac{27}{5};\frac{14}{5}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{27}{5};\frac{9}{5}\right);\overrightarrow{IH}=\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$ nên $AD=\frac{9}{5}\sqrt{10};IH=\frac{1}{5}\sqrt{10}$ và $BC=\sqrt{10}$

$$dt\left(ABCD\right)=\frac{BC+AD}{2}.IH=\frac{\sqrt{10}+\frac{9}{5}\sqrt{10}}{2}.\frac{1}{5}\sqrt{10}=\frac{14}{5}\text{ (đvdt)}$$

Cách khác: Ta có AD // BC nên phương trình đường thẳng AD:
$x-3y+3=0$

Gọi $D(3y-3;y)\in AD$ và $CD=\sqrt{(3y-7)^2+(y-3)^2}=AB=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 10y^2-48y+56=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{14}{5}\\y=2\end{array}\right.\Rightarrow D_1\left(\frac{27}{5};\frac{14}{5}\right);D_2\left(3;2\right)$$

Phương trình đường thẳng AB: $x-y+1=0$ và D, C nằm cùng phía đối với AB nên $D\equiv D_1$

Bài 9. a. Thay tọa độ các điểm A, B, C vào phương trình đường thẳng d, ta có: $d(A)=-4$; $d(B)=-7$, $d(C)=12$

Suy ra: $d(A)d(B)=28>0$ nên đường thẳng d không cắt cạnh AB.

$d(A)d(C)=-48<0$ nên đường thẳng d cắt cạnh AC.

$d(C)d(B)=-84<0$ nên đường thẳng d cắt cạnh BC.

b. Ta có: A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Gọi A' đối xứng với A qua d thì $A'\left(\frac{3}{5};-\frac{16}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng A'B: $31x-7y-41=0$ Suy ra: $I=A'B\cap d$ có tọa độ $I\left(\frac{61}{55};-\frac{52}{55}\right)$

c. Ta có: A, C nằm khác phía với đường thẳng d nên JA + JC nhỏ nhất khi $J=AC\cap d$

Phương trình đường thẳng AC: $3x+2y+3=0$ và $J\left(0;-\frac{3}{2}\right)$

d. Phương trình đường thẳng A'C: $7x+6y+15=0$; $H=A'C\cap d$ có tọa độ $H\left(-\frac{3}{5};-\frac{9}{5}\right)$

e. Gọi M(2y + 3; y) thuộc đường thẳng d và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-6y-5;-3y-3)$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{45y^2+78y+34}=\sqrt{45\left(y+\frac{13}{15}\right)^2+\frac{1}{5}}\geq\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Suy ra: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $y=-\dfrac{13}{15}\Rightarrow x=\dfrac{19}{15}$.

Vậy $M\left(\dfrac{19}{15};-\dfrac{13}{15}\right)$

Bài 10. Gọi A(a; 0)∈Ox, B(0; b)∈ Oy và trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right)$,

$\overrightarrow{AB}=(-a;b)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{d}=(2;1)$

A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng d nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{d}\\ I\in d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{d}=0\\ I\in d\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+b=0\\ a-2b+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}$. Vậy A(2; 0) và B(0; 4)

Cách khác: Gọi A(a; 0)∈Ox, B(0; b)∈ Oy. Biểu thức phép đối xứng trục d là:

$$S_d:M(x;y)\mapsto M\left(x';y'\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{3x+4y-6}{5}\\ y'=\dfrac{4x-3y+12}{5}\end{cases}$$

$$S_d:A(a;0)\mapsto B(0;b)\Leftrightarrow\begin{cases}0=\dfrac{3a-6}{5}\\ b=\dfrac{4a+12}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}.$$

Vậy A(2; 0) và B(0; 4)

Bài 11. Gọi M(2y + 3; y) ∈ d_1 và

$$d(M,d_2)=\frac{|2y+3+y+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|3y+4|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|3y+4|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ M(1; −1) hoặc $M\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$

Bài 12. Ta có: A = $d_1\cap d_2$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}2x-3y+1=0\\ 4x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Gọi $B\left(\frac{3y-1}{2};y\right)\in d_1$ và $C\left(x;-4x+5\right)\in d_2$. Tam giác ABC nhận G là trọng tâm nên:

$$\begin{cases}1+\dfrac{3y-1}{2}+x=9\\ 1+y-4x+5=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=17\\ -4x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{5}{7}\\ y=\dfrac{43}{7}\end{cases}\text{ nên } B\left(\frac{61}{7};\frac{43}{7}\right)\text{ và } C\left(-\frac{5}{7};\frac{55}{7}\right)$$

d_1 cắt d_2 tại A(1; 1) nên lấy M(−2; −1) $\in d_1$ và M' đối xứng với M qua d_2 thì $M'\left(\frac{78}{17};\frac{11}{17}\right)$

Đường thẳng d đối xứng với đường thẳng d_1 qua đường thẳng d_2 thì d đi qua hai điểm A, M'.

Phương trình đường thẳng d: $6x-61y-67=0$.

Bài 13. Gọi $B\left(b;0\right)$ và $C\left(0;c\right)$ với $b\geq 0$, $c\geq 0$ nên $\overrightarrow{AC}=\left(-2;c-1\right);\ \overrightarrow{AB}=\left(b-2;-1\right)$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow c=5-2b$

$$dt\left(\Delta ABC\right)=\frac{1}{2}AC.AB=b^2-4b+5$$

Đặt $f\left(b\right)=b^2-4b+5$ với $\begin{cases}b\geq 0\\ c=5-2b\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq b\leq\frac{5}{2}$

$f'\left(b\right)=2b-4\Rightarrow f'\left(b\right)=0\Leftrightarrow b=2$ nên $\max\limits_{0\leq b\leq\frac{5}{2}}f\left(b\right)=f\left(0\right)=5$ khi b = 0 và c = 5

Bài 14. Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases}x=2t\\ y=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ và gọi $C\left(2t;1+t\right)$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d là: $2x+y-2=0$

Tam giác ABC vuông tại B nên $B=\Delta\cap d$ có tọa độ: $B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$

$$\overrightarrow{BC}=\left(2t-\frac{2}{5};t-\frac{1}{5}\right);\ \overrightarrow{BA}\left(-\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$$

Mặt khác: AB = 2BC nên $\sqrt{\frac{20}{25}}=2\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2}\Leftrightarrow\left|5t-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{5}\\ t=0\end{array}\right.$ nên

$C\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$ hoặc C(0; 1)

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. Viết phương trình đường thẳng

1. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và song song với một đường thẳng d cho trước.

Phương pháp:

Cách 1. 1. Tìm véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\overrightarrow{n_d} = (A; B)$

2. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta} // \overrightarrow{n_d}$ hoặc $\overrightarrow{n_\Delta} = \overrightarrow{n_d}$

3. Phương trình đường thẳng Δ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Cách 2. 1. Giả sử đường thẳng d có phương trình : $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 \neq 0$

2. Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên phương trình có dạng:

$$Ax + By + C' = 0 \quad (1)$$

3. Thay toạ độ M_0 vào (1) ta tìm được C'

2. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

Phương pháp: 1. Giả sử đường thẳng d có phương trình : $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 \neq 0$

2. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta} // \vec{d} = (-B; A)$ hoặc véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{\Delta} // \overrightarrow{n_d} = (A; B)$

3. Phương trình đường thẳng Δ là: $-B(x - x_0) + (y - y_0)A = 0$

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$

3. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k cho trước

Phương pháp: Phương trình đường thẳng Δ: $y = k(x - x_0) + y_0$

Đặc biệt: Δ_1: $y = k_1x + b_1$ có hệ số góc k_1

Δ_2: $y = k_2x + b_2$ có hệ số góc k_2

$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ và $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và $0^0 \leq \varphi < 90^0$ thì $\tan\varphi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$

4. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

Phương pháp: Phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$ với $\begin{cases} x_B \neq x_A \\ y_B \neq y_A \end{cases}$

Đặc biệt: Khi A(a; 0), B(0; b) với ab ≠ 0, phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Bài tập mẫu

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng Δ:

a. Đi qua điểm M (2; 4) và song song với đường thẳng d: x – 2y + 4 = 0

b. Đi qua điểm M (–3; 5) và song song với đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3-3t \end{cases}$

Giải

a. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\overrightarrow{n_d}$ = (1; –2)

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\Delta}=\overrightarrow{n_d}$ = (1; –2)

Phương trình của đường thẳng Δ : $1(x-2)-2(y-4)=0 \Leftrightarrow x-2y+6=0$

Cách khác: Đường thẳng Δ song song đường thẳng d có phương trình: x – 2y + C = 0 (1)

Điểm M thuộc Δ nên thay toạ độ điểm M vào (1) ta được:2 – 2.4 +C = 0 ⇔ C = 6

Phương trình của đường thẳng Δ là: x – 2y + 6 = 0

b. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{d}=(2;-3)$ nên véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}$ = (3; 2)

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\Delta}=\overrightarrow{n_d}$ = (3; 2)

Phương trình của đường thẳng Δ : $3(x+3)+2(y-5)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-1=0$

Cách khác: Phương trình tổng quát của đường thẳng d: $3x+2y+3=0$

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên phương trình có dạng: 3x + 2y + C = 0 (1)

Điểm M thuộc Δ nên thay toạ độ điểm M vào (1) ta được:

3 (–3) + 2.5 + C = 0 ⇔ C = –1

Phương trình của đường thẳng Δ là: 3x + 2y –1 = 0

Bài 2. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có), tổng quát của đường thẳng Δ:

a. Đi qua điểm M (7; –5) và vuông góc với đường thẳng d: x +3y –6 = 0

b. Đi qua điểm M (1; –2) và vuông góc với đường thẳng d: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=5 \end{cases}$

Giải

a. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta} // \vec{d} = (-3:1)$ hoặc véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{\Delta} // \overrightarrow{n_d} = (1;3)$

Phương trình tham số của đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ : $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y+5}{3}$

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ : $3x - y - 26 = 0$

b. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta} // \vec{d} = (2:0)$ hoặc véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{\Delta} // \overrightarrow{n_d} = (0;2)$

Phương trình tham số Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \end{cases}$

Phương trình tổng quát Δ : $y + 2 = 0$

Bài 3. Cho hai điểm P(4, 0), Q(0; – 2)

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm P và Q

b. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng PQ

Giải

a. Đường thẳng đi qua hai điểm P(4; 0) và Q(0; –2) là:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{(-2)} = 1 \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$$

b. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng PQ ta có: M(2; –1), $\overrightarrow{PQ} = (-4; -2)$

Đường trung trực của đoạn thẳng PQ đi qua điểm M và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{PQ}$

Phương trình đường trung trực: $2x + y - 3 = 0$

Bài 4. Cho điểm I(–2, 0) và hai đường thẳng $d_1 : 2x - y + 5 = 0$, $d_2 : x + y - 3 = 0$

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm I, cắt d_1, d_2 tại A, B sao cho: $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$

Giải

Gọi $A(x;2x+5) \in d_1$; $B(3-y;y) \in d_2$ và $\overrightarrow{IA} = (x+2;2x+5)$; $\overrightarrow{IB} = (5-y;y)$

Ta có: $\overrightarrow{IA} = 2\,\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2(5-y) \\ 2x + 5 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ nên $A(1;7); B\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng AB: $7x - 3y + 14 = 0$

Bài 5. Cho đường thẳng d: $3x - 2y + 5 = 0$ và điểm $A(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng:

a. Đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d

b. Đi qua điểm A và song song với đường thẳng d

c. Đi qua điểm A và tạo với đường thẳng d một góc 45^o

Giải

Phương trình đường thẳng d : $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ có hệ số góc $k = \frac{3}{2}$

a. Đường thẳng d_1 đi qua A và vuông góc với d có hệ số $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{2}{3}$ có phương trình: $y = -\frac{2}{3}(x - 1) + 2 \Leftrightarrow 2x + 3y - 8 = 0$

b. Đường thẳng d_1 đi qua A và song song với d có hệ số góc $k_1 = k = \frac{3}{2}$ có phương trình: $y = \frac{3}{2}(x - 1) + 2 \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0$

c. Gọi k_1 là hệ số góc của đường thẳng d_1 đi qua điểm A và tạo với đường thẳng d một góc 45^o

Phương trình của d_1: $y = k_1(x - 1) + 2$

Ta có: $\tan 45^o = \left|\dfrac{\frac{3}{2} - k_1}{1 + \frac{3}{2}k_1}\right| \Leftrightarrow \dfrac{|3 - 2k_1|}{|2 + 3k_1|} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3 - 2k_1}{2 + 3k_1} = 1 \\ \dfrac{3 - 2k_1}{2 + 3k_1} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{1}{5} \\ k_1 = -5 \end{array}\right.$

Phương trình của d_1: $x - 5y + 9 = 0$; $5x + y - 7 = 0$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có), tổng quát của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a. Δ đi qua điểm $M(2;-1)$ và song song với đường thẳng d: $\frac{2x + 1}{1} = \frac{y - 3}{2}$.

b. Δ đi qua gốc toạ độ $O(0;0)$ và song song với đường thẳng d: $x + 2y - 7 = 0$

Bài 2. Viết phương trình các đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1;1)$, $N(1;9)$ và $P(9;1)$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $A(-1;2)$, $B(2;-4)$ và $C(1;0)$

a. Viết phương trình các đường cao của tam giác ABC

b. Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC

c. Tính diện tích của tam giác ABC

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(1;2) và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.

Bài 5: Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có), tổng quát của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

a. Đi qua điểm M(1;–4) và vuông góc đường thẳng có phương trình
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

b. Đi qua điểm N(1;3) và vuông góc với đường thẳng có phương trình 2x – 5y + 4 = 0

c. Đi qua hai điểm A(1;5), B(–2;9)

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a. Đi qua điểm M(2; 5) và cách đều hai điểm P(–1;2), Q(5; 4)

b. Đi qua điểm A(2; 5) và cách điểm B(5; 1) một khoảng bằng 3.

Bài 7. Viết phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a. Đi qua điểm A(2; 1) và tạo với đường thẳng d: 2x + 3y + 4 = 0 một góc 45^0

b. Đi qua điểm A(1; 1) và tạo với đường thẳng d: $\begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = 4 + t \end{cases}$ một góc 60^0

Bài 8. Cho ΔABC, biết A(1; –1), B(–2; 1) và C(3; 5)

a. Viết phương trình đường thẳng chứa trung tuyến BM (M ∈AC) của ΔABC

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với trung tuyến BM

Bài 9. Cho điểm M(2; 1) và đường thẳng d: x – y = 0. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt Ox, đường thẳng d tại A, B sao cho tam giác AMB vuông cân tại M

Bài 10. Cho điểm M(3; 1). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt hai nửa trục dương Ox, Oy tại A, B sao cho OA + OB nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Bài 1.a. Phương trình đường thẳng d: $\frac{2x+1}{1}=\frac{y-3}{2} \Rightarrow d: \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{y-3}{2}$ có

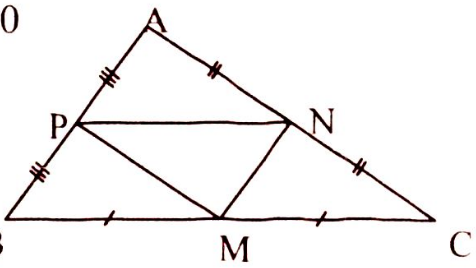
VTCP $\vec{d}=\left(\frac{1}{2};2\right)//\vec{d_1}=(1;4)$

Phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$, chính tắc : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{4}$, tổng quát : $4x - y - 9 = 0$

b. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{d} = (-2;1)$

Phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$, chính tắc: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{1}$, tổng quát: $x + 2y = 0$

Bài 2. Đường trung trực cạnh AB đi qua điểm P có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MN} = (2;8)$ có phương trình: $x + 4y - 13 = 0$



Phương trình đường trung trực cạnh BC:

$x - y + 2 = 0$

Phương trình đường trung trực cạnh AC:

$x - 1 = 0$

Bài 3.

a. Đường cao AH đi qua A, VTPT: $\overrightarrow{BC} = (-1;4)$ có phương trình:

$x - 4y + 9 = 0$

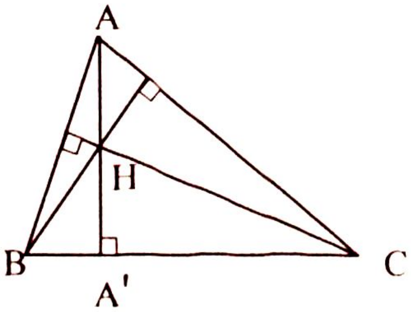
Phương trình đường cao BH: $x - y - 6 = 0$

Phương trình đường cao CH: $x - 2y - 1 = 0$

b. Trực tâm H của tam giác ABC là giao điểm hai đường cao AH, BH

Toạ độ của H là nghiệm của:

$\begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases}$. Vậy H(11;5)



c. Phương trình đường thẳng BC: $4x + y - 4 = 0$

Gọi $h = d(A, BC) = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$ và BC = $\sqrt{17}$

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}h.BC = 3$ (đvdt)

Bài 4. Gọi giao điểm của Δ với hai tia Ox, Oy lần lượt là A(a;0), B(0;b) với a > 0, b > 0

Đường thẳng Δ có phương trình theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (1)

$M(1;2) \in \Delta \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$ và $S = dt(\Delta OAB) = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}ab$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $1 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{2}{a.b}} \Rightarrow 1 \geq \dfrac{8}{ab}$

$\Rightarrow a.b \geq 8 \Rightarrow S \geq 4$

S đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ S = 4 ⇔ $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$ ⇔ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng Δ thoả mãn đề bài là: $2x + y - 4 = 0$

Bài 5.

a. Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$; chính tắc: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}$, tổng quát: $3x - 2y - 11 = 0$

b. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d: $2x - 5y + 4 = 0$ là $\vec{n} = (2;-5)$

Đường thẳng Δ đi qua N, vuông góc với đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{\Delta} = \vec{n} = (2;-5)$

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$; chính tắc: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-5}$; tổng quát: $5x + 2y - 11 = 0$

c. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;4)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5 + 4t \end{cases}$, chính tắc: $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-5}{4}$; tổng quát: $4x + 3y - 19 = 0$

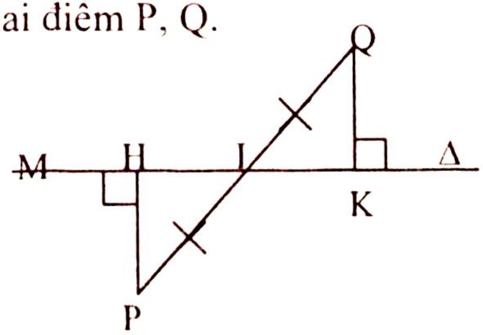
Bài 6.

a. **Trường hợp 1.** Khi Δ // PQ thì Δ cách đều hai điểm P, Q.

Ta có: $\overrightarrow{PQ} = (6;2) \perp \overrightarrow{n_\Delta} = (1;-3)$ nên phương trình đường thẳng $\Delta: x - 3y + 13 = 0$

Trường hợp 2: Khi Δ không song song với PQ

Ta có: Đường thẳng Δ đi qua M, cách đều hai điểm P, Q



Suy ra: Δ PHI = Δ QKI ⇒ IP = IQ nên I(2; 3)

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M, I có phương trình: $x - 2 = 0$

Cách khác. Đường thẳng Δ đi qua điểm A(2; 5) có phương trình:

$Ax + By - 2A - 5B = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0.$

Ta có: $d(P,\Delta) = \frac{|-A + 2B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-3A - 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$d(Q,\Delta) = \frac{|5A + 4B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$d(P,\Delta)=d(Q,\Delta)\Leftrightarrow\frac{|-3A-3B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}}\Leftrightarrow|3A+3B|=|3A-B|$$

$$|3A+3B|=|3A-B|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=0\\B=-3A\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: x – 2 = 0 hoặc: x – 3y + 13 = 0

b. Đường thẳng Δ đi qua điểm A(2; 5) có phương trình:

Ax + By –2A – 5B = 0, $A^2+B^2\neq 0$

Ta có:

$$d(B,\Delta)=\frac{|5A+B-2A-5B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3\Leftrightarrow|3A-4B|=3\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow 7B^2-24AB=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=0\\B=\dfrac{24A}{7}\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: x – 2 = 0; 7x + 24y –134 = 0

Bài 7. a. x – 5y +3 = 0; 5x + y – 11 = 0

b. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\overrightarrow{n_d}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm A(1; 1) có phương trình:

Ax + By – A – B = 0, $A^2+B^2\neq 0$

Ta có: $\cos 60^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|\left|\overrightarrow{n_d}\right|}=\dfrac{\left|A-\sqrt{3}B\right|}{2\sqrt{A^2+B^2}}\Leftrightarrow\dfrac{\left|A-\sqrt{3}B\right|}{2\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left|A-\sqrt{3}B\right|=\sqrt{A^2+B^2}\Leftrightarrow B^2-\sqrt{3}AB=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=0\\B=\sqrt{3}A\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: x – 1 = 0; $x+\sqrt{3}y-1-\sqrt{3}=0$

Bài 8. a. Trung điểm của AC là M(2; 2) và phương trình đường thẳng chứa trung tuyến BM: $\dfrac{x+2}{2+2}=\dfrac{y-1}{2-1}\Leftrightarrow x-4y+6=0$

b. Gọi d là đường thẳng vuông góc với BM, hệ số góc của d là k = – 4

Phương trình đường thẳng d: y = – 4(x – 1) – 1 ⇔ 4x + y – 3 = 0

Bài 9. Gọi $A(x;0)\in Ox$; $B(y;y)\in d$ và $\overrightarrow{MA}=(x-2;-1)$; $\overrightarrow{MB}=(y-2;y-1)$

Tam giác AMB vuông cân tại M nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\\MA=MB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\\MA^2=MB^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(y-2)-(y-1)=0\\(x-2)^2+1=(y-2)^2+(y-1)^2\end{cases}$$

Đặt u = x – 2 và v = y – 2, ta có: $\begin{cases} uv = v+1 \\ (u^2+1)(v^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = v+1 \\ v^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} uv = v+1 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} uv = v+1 \\ v = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(4;0);B(3;3) \\ A(2;0);B(1;1) \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: 3x + y – 12 = 0 hoặc x + y – 2 = 0

Bài 10. Gọi $A(a;0)\in Ox;\ B(0;b)\in Oy$ với a > 0, b > 0. Phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Ta có: $M\in\Delta\Rightarrow\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow b=\frac{a}{a-3}$ với a ≠ 3

Ta có: $OA+OB=|a|+|b|=a+b=a+\frac{a}{a-3}$ với a > 0 và a ≠ 3

Xét $f(a)=a+\frac{a}{a-3}\Rightarrow f'(a)=1-\frac{3}{(a-3)^2}$ nên $f'(a)=0\Rightarrow 1-\frac{3}{(a-3)^2}=0\Rightarrow a=3\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \min\limits_{a>3} f(a)=4+2\sqrt{3}$ khi $a=3+\sqrt{3};\ b=1+\sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng Δ: $x+y\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

II. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Phương pháp:

1. Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng: Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Ta có các trường hợp sau:

a. Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$

b. $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

c. $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

2. Toạ độ giao điểm Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$

3. Đặc biệt: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ với $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2)$

4. Nếu đường thẳng có phương trình tham số (chính tắc) thì chuyển v phương trình tổng quát và sử dụng kiến thức về vị trí tương đối của ha đường thẳng để xét

Bài tập mẫu

Bài 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng cho bởi các phương trình sau:

a. $a_1: x + 2y + 4 = 0$ b. $b_1: x + y + 5 = 0$ c. $c_1: x + 2y + 1 = 0$

$a_2: x + 5y - 9 = 0$ $b_2: 2x + 2y - 4 = 0$ $c_2: 3x + 6y + 3 = 0$

Giải

a. Ta có $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow a_1$ cắt a_2, toạ độ giao điểm là nghiệm :

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + 5y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-38}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases}$$

b. Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{-4} \Rightarrow b_1 \mathbin{/\!/} b_2$

c. Ta có: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 \equiv c_2$

Bài 2. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau và tìm toạ độ gia điểm (nếu có)

a. $a_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ và $a_2: \begin{cases} x = 8 + 6t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

b. $b_1: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $b_2: \frac{x-4}{2} = \frac{y+7}{3}$

c. $c_1: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{4}$ và $c_2: \frac{x}{1} = \frac{5y-6}{-4}$

Giải

a. Phương trình tổng quát của đường thẳng $a_1: x + 2y - 14 = 0$

Phương trình tổng quát của đường thẳng $a_2: x + 2y - 16 = 0$

Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} \neq \frac{14}{16}$, suy ra: $a_1 \mathbin{/\!/} a_2$

b. Phương trình tổng quát của đường thẳng $b_1: x + 2y - 5 = 0$

Phương trình tổng quát của đường thẳng $b_2: 3x - 2y - 26 = 0$.

Ta có: $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-2} \Rightarrow b_1$ cắt b_2.

Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - 2y - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31}{4} \\ y = -\dfrac{11}{8} \end{cases}$

c. Phương trình tổng quát của đường thẳng c_1: $4x + 5y - 6 = 0$

Phương trình tổng quát của đường thẳng c_2: $4x + 5y - 6 = 0$

Ta có: $\frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{-6}{-6} = 1 \Rightarrow c_1 \equiv c_2$

Bài 3. a. Xác định giá trị của m để hai đường thẳng sau song song với nhau.

D_1 : $2x + my + 1 = 0$ D_2 : $mx + 8y + 2 = 0$

b. Xác định giá trị của m để hai đường thẳng sau vuông góc với nhau.

D_1: $2x + my - 9 = 0$ D_2: $6x - y - 10 = 0$

Giải

a. Ta có : $D_1 // D_2 \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{m}{8} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 16 \\ 4 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 4 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$

b. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng D_1 là $\vec{n_1} = (2; m)$

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng D_2 là $\vec{n_2} = (6; -1)$

Ta có: $D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow 12 - m = 0 \Leftrightarrow m = 12$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho hai đường thẳng: d_1: $4x - my + 4 - m = 0$ và d_2: $(2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$

a. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2

b. Tìm m để d_1 vuông góc với d_2

Bài 2. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = x_2 + ct' \\ y = y_2 + dt' \end{cases}$ $(x_1, x_2, y_1, y_2$ là hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng d_1, d_2:

a. Cắt nhau b. Song song

c. Trùng nhau d. Vuông góc với nhau

Bài 3. Cho hai đường thẳng $d_1 : (a - b)x + y = 1$ và $d_2 : (a^2 - b^2)x + ay = b$ với $a^2 + b^2 > 0$

a. Xác định giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.

b. Tìm điều kiện của a, b để giao điểm đó thuộc trục hoành.

Bài 4. Cho hai đường thẳng $d_1: mx - y + m = 0$ và $d_2: \left(1-m^2\right)x + 2my - m^2 - 1 = 0$

a. Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng d_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị của m, xác định giao điểm I của d_1 và d_2. Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Véc tơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (4; -m)$, $\overrightarrow{n_2} = (2m+6; 1)$

Xét các tỉ số:

* $d_1 \equiv d_2$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+6}{4} = \frac{1}{-m} = \frac{-2m-1}{4-m} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m+6}{4} = \dfrac{1}{-m} \\ \dfrac{-2m-1}{4-m} = \dfrac{1}{-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

* $d_1 // d_2$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+6}{4} = \frac{1}{-m} \neq \frac{-2m-1}{4-m} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m+6}{4} = \dfrac{1}{-m} \\ \dfrac{-2m-1}{4-m} \neq \dfrac{1}{-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

* d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \dfrac{2m+6}{4} \neq \dfrac{1}{-m} \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$

* d_1 vuông góc với d_2 $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 4(2m+6) - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-24}{7}$

Bài 2. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + at = x_2 + ct' \\ y_1 + bt = y_2 + dt' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} at - ct' = x_2 - x_1 \\ bt - dt' = y_2 - y_1 \end{cases}$. Lập các định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & -c \\ b & -d \end{vmatrix} = bc - ad; D_t = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & -c \\ y_2 - y_1 & -d \end{vmatrix} = c(y_2 - y_1) - \text{d}(x_2 - x_1);$$

$$D_{t'} = \begin{vmatrix} a & x_2 - x_1 \\ b & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = a(y_2 - y_1) - \text{b}(x_2 - x_1)$$

* d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow bc - ad \neq 0$

$$* \ d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_t \neq 0 \\ D_{t'} \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - ad = 0 \\ \left[\begin{array}{l} c(y_2 - y_1) - \text{d}(x_2 - x_1) \neq 0 \\ a(y_2 - y_1) - \text{b}(x_2 - x_1) \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - ad = 0 \\ c(y_2 - y_1) - \text{d}(x_2 - x_1) \neq 0 \end{cases}$$

$$* \ d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - a\mathrm{d} = 0 \\ c(y_2 - y_1) - \mathrm{d}(x_2 - x_1) = 0 \\ a(y_2 - y_1) - \mathrm{b}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - a\mathrm{d} = 0 \\ c(y_2 - y_1) - \mathrm{d}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$* \ d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{d_1} \perp \overrightarrow{d_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{d_1}.\overrightarrow{d_2} = 0 \Leftrightarrow ac + b\mathrm{d} = 0$$

Bài 3. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} (a-b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b \end{cases}$.

Lập các định thức: $D = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2 - b^2 & a \end{vmatrix} = b^2 - ab = b(b-a)$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b$; $D_y = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2 - b^2 & b \end{vmatrix} = ab - a^2 = a(b-a)$

Khi $D \neq 0 \Leftrightarrow b(b-a) \neq 0$ thì d_1 cắt d_2 tại điểm I có tọa độ $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = -\dfrac{1}{b} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

b. Điểm I thuộc trục hoành khi: $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b(b-a) \neq 0 \\ \dfrac{a}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a = 0 \end{cases}$

Bài 4. a. Gọi $M(x_0, y_0) \in d_1$, $\forall$ m.

Suy ra: $mx_0 - y_0 + m = 0 \Leftrightarrow m(x_0 + 1) - y_0 = 0$ có nghiệm với mọi m. Suy ra: $\begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ -y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$. Điểm cố định M(−1; 0)

b. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} m\mathrm{x} - y = -m \\ (1 - m^2)x + 2my = m^2 + 1 \end{cases}$. Lập các định thức $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 - m^2 & 2m \end{vmatrix} = m^2 + 1$

$D_x = \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 1 + m^2 & 2m \end{vmatrix} = 1 - m^2$; $D_y = \begin{vmatrix} m & -m \\ 1 - m^2 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = 2m$

Tọa độ điểm I là $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2m}{1 + m^2} \end{cases}$ với mọi m

Ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{1-m^2}{1+m^2} \\ y = \dfrac{2m}{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2m}{1+m^2}\right)^2 = \left(\dfrac{1+m^2}{1+m^2}\right)^2 = 1$

Điểm I luôn thuộc một đường tròn cố định có phương trình: $x^2 + y^2 = 1$

III. Khoảng cách, góc và phương trình phân giác của góc giữa hai đường thẳng

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Phương pháp:

– Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$ ta dùng công thức: $d(M_o,\Delta) = \dfrac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ với $A^2 + B^2 > 0$

– Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ_1 và Δ thì:

+ Lấy một điểm $M_o \in \Delta_1$

+ Khoảng cách giữa Δ_1 và Δ là: $d(\Delta_1,\Delta) = d(M_o,\Delta)$

Bài tập mẫu

Bài 1. Tính các khoảng cách sau:

a. Từ điểm A(3;5) đến đường thẳng Δ: $4x + 3y + 1 = 0$

b. Giữa hai đường thẳng song song Δ_1: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ và Δ: $x - 2y - 3 = 0$

Giải

a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là:

$$d(A,\Delta) = \frac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{28}{5}$$

b. Ta có $\Delta_1 // \Delta$ nên $d(\Delta_1,\Delta) = \begin{cases} d(M,\Delta) \\ M(2;3) \in \Delta_1 \end{cases} = d(M,\Delta) = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$

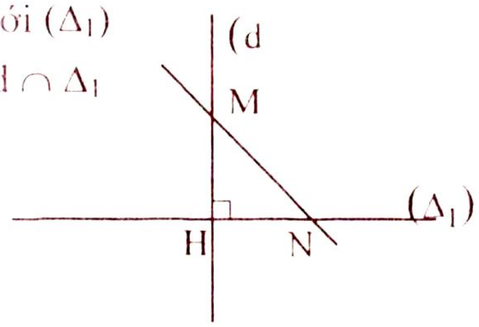
Bài 2. Cho hai đường thẳng Δ_1: $2x + 3y - 6 = 0$, Δ_2: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$ và điểm M(2;1)

a. Tìm điểm H thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất

b. Tìm điểm I thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ_1 bằng $\sqrt{13}$

Giải

a. Gọi d là đường thẳng đi qua M, vuông góc với (Δ_1)



Phương trình của d: $3x - 2y - 4 = 0$ và $H = d \cap \Delta_1$

Toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{13} \\ y = \dfrac{10}{13} \end{cases}$$

$\forall N \in \Delta_1$, Ta có $MN \geq MH$. Suy ra MH là đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất

$$\Rightarrow H\left(\frac{24}{13}; \frac{10}{13}\right)$$

b. Gọi $I(1 + t; 2 + t) \in \Delta_2$, khoảng cách từ điểm I đến Δ_1 là:

$$d(I, \Delta_1) = \frac{|2(1+t) + 3(2+t) - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{|5t + 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t + 2 = 13 \\ 5t + 2 = -13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{11}{5} \\ t = -3 \end{array}\right.$$

Điểm I có toạ độ $\left(\dfrac{16}{5}; \dfrac{21}{5}\right)$ hoặc $(-2;-1)$

Bài 3.(D–2010) Cho điểm A(0; 2) và đường thẳng Δ đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH

Giải

Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x; y - 2); \overrightarrow{OH} = (x; y)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OH} \\ AH = d(H, Ox) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y(y-2) = 0 \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y - 4 = 0 \\ x^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \pm \sqrt{5} \\ x^2 = 4y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + \sqrt{5} \\ x = \pm\sqrt{4\sqrt{5} - 8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(\pm\sqrt{4\sqrt{5} - 8}; -1 + \sqrt{5}\right)$$

Phương trình đường thẳng Δ: $\left(-1 + \sqrt{5}\right)x \pm y\sqrt{4\sqrt{5} - 8} = 0$

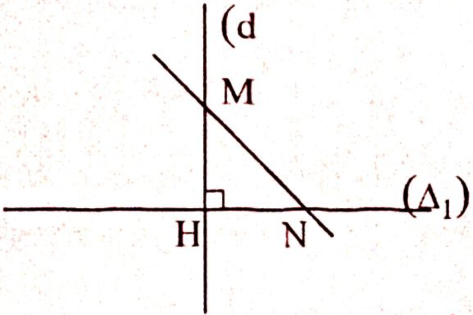
2. Tính góc và viết phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cho trước

Phương pháp:

Hai đường thẳng

Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$



1. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là $0^o \le \varphi \le 90^o$ và

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2. Phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là :

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Bài tập mẫu

Bài 1. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a. Δ_1: $x - 2y + 5 = 0$ và Δ_2: $3x - y = 0$

b. Δ_1: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$

Giải

a. Véc tơ pháp tuyến của Δ_1 là $\vec{n_1} = (1;-2)$ và véc tơ pháp tuyến của Δ_2 là $\vec{n_2} = (3;-1)$

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 45^o$$

b. Véc tơ chỉ phương của Δ_1 là $\overrightarrow{\Delta_1} = (-5; 2)$ nên véc tơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (2; 5)$

Véc tơ chỉ phương của Δ_2 là $\overrightarrow{\Delta_2} = (2; 5)$ nên véc tơ pháp tuyến $\vec{n_2} = (5; -2)$

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{|2.5 - 2.5|}{\sqrt{29}.\sqrt{29}} = 0 \Rightarrow (\Delta_1,\Delta_2) = 90^o \Leftrightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$$

Bài 2. Cho hai đường thẳng d_1: $2x - y - 2 = 0$ và d_2: $2x + 4y - 7 = 0$

a. Viết phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm P(3;1) cùng với d_1, d_2 tạo thành một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2

Giải

a. Phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 là:

$$\frac{2x+4y-7}{\sqrt{20}} = \pm\frac{2x-y-2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-6y+3=0 & (P_1) \\ 6x+2y-11=0 & (P_2) \end{array}\right.$$

b. Đường thẳng Δ đi qua điểm P cùng với d_1, d_2 tạo thành một tam giác cân có đỉnh $A = d_1 \cap d_2$ thì $\Delta \perp P_1$ hoặc $\Delta \perp P_2$

Phương trình đường thẳng Δ_1: $3x + y - 10 = 0$ và Δ_2: $x - 3y = 0$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho hai đường thẳng d_1: $2x - y - 2 = 0$, d_2: $x + y + 3 = 0$ và điểm P(3;0). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm P cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B.Viết phương trình đường thẳng d sao cho:PA = PB

Bài 2. Cho hai đường thẳng d_1: $2x - y + 1 = 0$ và d_2: $x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ tạo với d_1, d_2 một tam giác cân có đỉnh là giao của d_1, d_2. Tính diện tích tam giác đó.

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d: $3x - 4y + 1 = 0$ và có khoảng cách đến đường thẳng d bằng 1.

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(2; 7) và cách điểm B(1; 2) một khoảng bằng 1.

Bài 5. Cho tam giác ABC, biết ba cạnh có phương trình: AB: $x - y + 4 = 0$; BC: $3x + 5y + 4 = 0$; AC: $7x + y - 12 = 0$.

a. Viết phương trình phân giác trong của góc A.

b. Chứng minh rằng điểm O nằm trong tam giác

Bài 6. Cho đường thẳng d: $(m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1 = 0$ và hai điểm A(2; 3), B(1; 0).

a. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b. Tìm m để đường thẳng d cắt đoạn thẳng AB.

c. Tìm m để khoảng cách từ A đến đường thẳng d là lớn nhất.

Bài 7. Cho ba điểm A(−6;−3), B(−4;3) và C(9;2)

a. Viết phương trình đường thẳng d chứa đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC

b. Tìm điểm D trên đường thẳng d sao cho tứ giác ABDC là hình thang

Hướng dẫn giải

Bài 1. * Khi đường thẳng d không vuông góc với trục Ox.Phương trình đường thẳng d đi qua điểm P(3;0) có hệ số góc k: $y = kx - 3k$

$A = d \cap d_1$ có toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = kx - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-3k}{2-k} \\ y = \dfrac{-4k}{2-k} \end{cases}$ với

$k \neq 2$

$B = d \cap d_2$ có toạ độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y = kx - 3k \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3k-3}{1+k} \\ y = \dfrac{-6k}{1+k} \end{cases}$ với

$k \neq -1$

Ta có: P, A, B nằm trên d và PA = PB nên P là trung điểm của AB

Suy ra: $x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \dfrac{2-3k}{2-k} + \dfrac{3k-3}{1+k} = 6 \Rightarrow$ $k = 8$, nên d: $y = 8x - 24$

* Khi $d \perp Ox$, đường thẳng d đi qua P(3;0) có phương trình $x = 3$, thay vào phương trình của d_1, d_2 ta có: $y_A = 4$; $y_B = -6$ và $\dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \neq y_P = 0$

Phương trình đường thẳng d : $8x - y - 24 = 0$

Cách khác: Gọi $A(x; 2x-2) \in d_1$ và $B(-y-3; y) \in d_2$, $\overrightarrow{PA} = (x-3; 2x-2)$, $\overrightarrow{PB} = (-y-6; y)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{PA} // \overrightarrow{PB} \\ PA = PB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy - 5y + 12x - 12 = 0 \\ x - y = 9 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{3} \\ y = -\dfrac{16}{3} \end{cases}$

nên $A\left(\dfrac{11}{3}; \dfrac{16}{3}\right); B\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{16}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng AB : $8x - y - 24 = 0$

Bài 2. Gọi $A = d_1 \cap d_2$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$, A(1;3)

Phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 là:

$\dfrac{2x - y + 1}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{x + 2y - 7}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - 3y + 8 = 0 & (P_1) \\ 3x + y - 6 = 0 & (P_2) \end{array}\right.$

Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng P_1 hoặc P_2.

* Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng P_1 có phương trình: $3x + y = 0$

$$h = d(A,d) = \frac{|3.1+3|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \text{ nên } dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}h.BC = \frac{18}{5} \text{ (đvdt)}$$

* Dường thẳng d đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng P_2 có phương trình: x – 3y = 0

Gọi B = d ∩ d_1 và C = d ∩ d_2 thì $B\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right), C\left(\frac{21}{5};\frac{7}{5}\right)$, BC = $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

$$h = d(A,d) = \frac{|1-3.3|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \text{ nên } dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}h.BC = \frac{32}{5} \text{ (đvdt)}$$

Bài 3. Gọi Δ là đường thẳng song song với đường thẳng d: 3x – 4y + 1 = 0. Khi đó phương trình của đường thẳng Δ có dạng: 3x – 4y + C = 0

Lấy điểm M(1; 1) ∈ d và $d(\Delta,d) = d(M,\Delta) = \frac{|3.1-4.1+C|}{5} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 6 \\ C = -4 \end{array}\right.$

phương trình của đường thẳng Δ : 3x – 4y + 6 = 0 hoặc 3x – 4y – 4 = 0

Bài 4. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(2; 7) có dạng:

Ax + By – 2A –7B = 0 với $A^2 + B^2 \neq 0$

Khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ là:

$$d(B,\Delta) = \frac{|-A-5B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1 \Leftrightarrow 24B^2 + 10AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = -\frac{5A}{12} \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: x – 2 = 0 hoặc 12x – 5y + 11 = 0

Bài 5. a. Phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng AB, AC là:

$$\frac{x-y+4}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7x+y-12}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+3y-16=0 & (P_1) \\ 3x-y+2=0 & (P_2) \end{array}\right.$$

Ta có: B = AB ∩ BC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y+4=0 \\ 3x+5y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

C = AC ∩ BC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x+y-12=0 \\ 3x+5y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$P_2(B) = -8$ và $P_2(C) = 10$ nên $P_2(B)P_2(C) < 0$ ⇒ B, C nằm khác phía đối với đường thẳng P_2.

Phương trình phân giác trong của góc A : 3x – y + 2 = 0

b. Thay tọa độ điểm O lần lượt vào vế trái phương trình của AB, BC, AC thì ta có: 4, 4, −12

Thay tọa độ các điểm C, A, B lần lượt vào vế trái phương trình của AB, BC, AC thì ta có: 8, 32, −32. Suy ra: O, C nằm cùng phía đối với AB; O, A nằm cùng phía đối với BC; O, B nằm cùng phía đối với AC nên O nằm trong tam giác ABC.

Bài 6. a. Gọi M(x_0; y_0) $\in$d, với mọi m. Suy ra: $m\left(x_0 + y_0 + 2\right) - 2x_0 - y_0 - 1 = 0$ có vô số nghiệm.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 2 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases}$. Vậy M(1; −3) $\in$d, với mọi m.

b. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng AB khi A, B nằm khác phía đối với đường thẳng d hoặc A $\in$d, hoặc B $\in$d. Suy ra: $(7m-8)(3m-3) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le \frac{8}{7}$

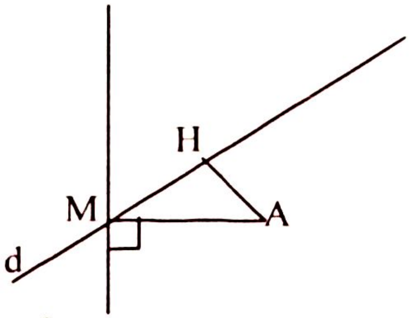
c. Khoảng cách từ A đến đường thẳng d là $d = d\left(A,d\right) = \frac{|7m-8|}{\sqrt{2m^2 - 6m + 5}}$

Suy ra: $d^2 = f\left(m\right) = \frac{(7m-8)^2}{2m^2 - 6m + 5}$, $\forall$ m $\in$R

$f'\left(m\right) = \frac{2(7m-8)(-5m+11)}{\left(2m^2 - 6m + 5\right)^2}$

và $f'\left(m\right) = 0 \Leftrightarrow 2(7m-8)(-5m+11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{8}{7} \\ m = \frac{11}{5} \end{array}\right.$

m	$-\infty$		$\frac{8}{7}$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
f'(m)		-	0	+	0	-	
f(m)	$\frac{49}{2}$	↘	0	↗	37	↘	$\frac{49}{2}$



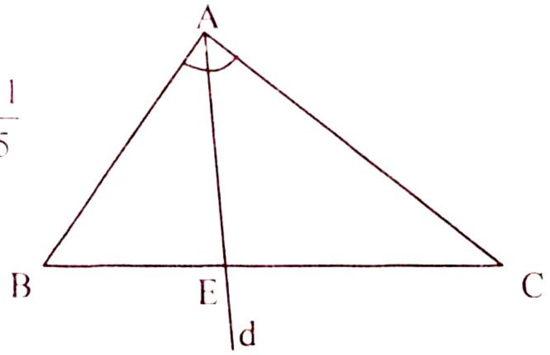
Ta có: d có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ d^2 có giá trị lớn nhất. Suy ra: d có giá trị lớn nhất khi m = $\frac{11}{5}$

Cách khác: Ta có: M(1; −3) $\in$d, với mọi m và kẻ AH $\perp$ d với H $\in$d

Suy ra: HA ≤ AM với mọi m. AH lớn nhất khi AH = AM ⇒ AM ⊥ d

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1;-6)$ và véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{d} = (1-m;m-2)$

AM ⊥ d $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{d} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{5}$



Bài 7.a. AE là phân giác trong góc A khi:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{2}{5}$$

Suy ra: $E\left(-\frac{2}{7};\frac{19}{7}\right)$. Phương trình phân giác AE: x – y + 3 = 0

b. Tứ giác ABDC là hình thang. Suy ra: AB // CD hoặc BD // AC

– Khi AB// CD, đường thẳng Δ đi qua C, song song với AB có phương trình: 3x – y – 25 = 0

D = Δ ∩ AE, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - y - 25 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 17 \end{cases}$.

Vậy: D(14;17)

– Khi AC // BD, đường thẳng Δ đi qua B, song song với AC có phương trình: x – 3y + 13 = 0

D = Δ ∩ AE, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3y + 13 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy: D(2;5)

IV. Tìm tọa độ các đỉnh, viết phương trình đường thẳng chứa cạnh của tam giác, tứ giác

1. Tìm tọa độ các đỉnh, viết phương trình đường thẳng chứa cạnh của tam giác

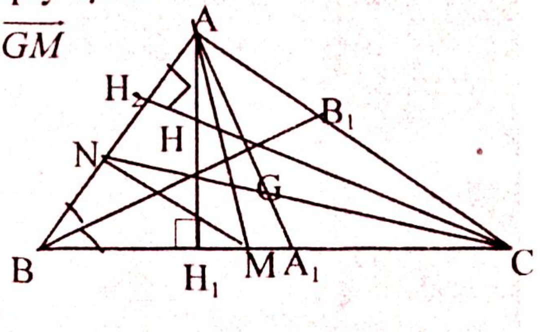
1.1. Tam giác

– Ba đường cao của Δ ABC đồng quy tại H gọi là trực tâm của tam giác

– Ba đường trung tuyến của Δ ABC đồng quy tại G.

G gọi là trọng tâm của tam giác và $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$

MN gọi là đường trung bình của tam giác và MN // AC, MN = $\frac{1}{2}$AC



– Ba đường phân giác trong của Δ ABC đồng quy tại một điểm gọi là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

BB_1 là phân giác trong của góc B và gọi A_1 đối xứng với A qua BB_1 thì $A_1 \in BC$

– Các công thức tính diện tích Δ ABC:

Đặt a = BC, b = AC, c = AB, h = AH_1; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$;

R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp Δ ABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr$$

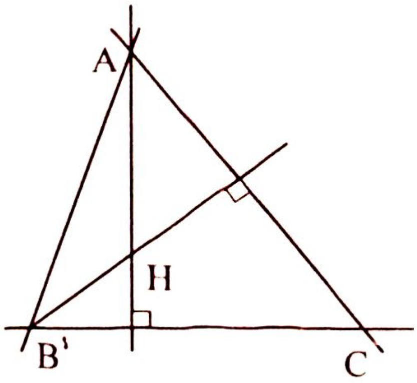
Bài tập mẫu

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình: x + y – 9 = 0.

Các đường cao qua đỉnh A, B lần lượt có phương trình: x + 2y – 13 = 0 và 7x + 5y – 49 = 0

Viết phương trình các đường thẳng chứa cạnh AC, BC và xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải



a. Ta có: A = AB ∩ AH, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-9=0 \\ x+2y-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

nên A(5; 4)

Ta có: B = AB ∩ BH, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-9=0 \\ 7x+5y-49=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$

nên B(2; 7)

Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua A, vuông góc với BH có phương trình: 5x – 7y + 3 = 0

Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua B, vuông góc với AH có phương trình: 2x – y + 3 = 0

Ta có: C = AC ∩ BC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x-7y+3=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

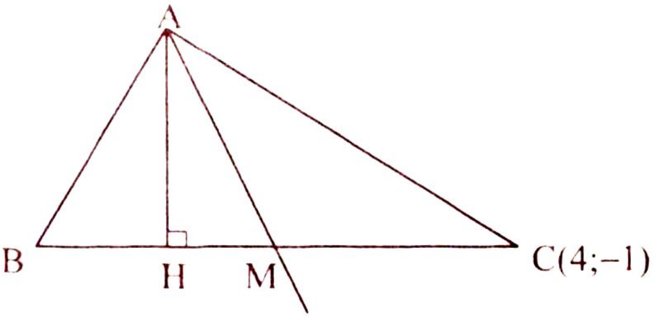
Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$

Bài 2. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh C(4;–1). Đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình tương ứng là: 2x – 3y + 12 = 0 và 2x + 3y = 0

Giải

Ta có điểm C(4;–1) không thuộc các đường thẳng có phương trình:

$2x - 3y + 12 = 0$ và $2x + 3y = 0$



Đặt AH: $2x - 3y + 12 = 0$

AM: $2x + 3y = 0$

$A = AH \cap AM$

Toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua hai điểm A và C có phương trình:

$3x + 7y - 5 = 0$

Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua C, vuông góc với AH có phương trình: $3x + 2y - 10 = 0$

$M = AM \cap BC$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$

M là trung điểm cạnh BC nên $\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 8 \\ y_B = 2y_M - y_C = -7 \end{cases}$

$\Rightarrow B(8;-7)$

Đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình: $9x + 11y + 5 = 0$

Bài 3. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết A(1;3) và hai đường trung tuyến có phương trình lần lượt: $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$

Giải

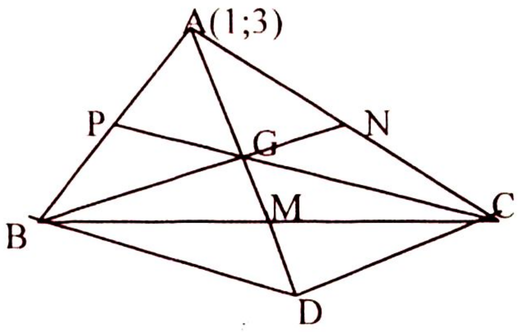
Ta có điểm A(1;3) không thuộc các đường thẳng có phương trình:

$x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$

Đặt: BN: $x - 2y + 1 = 0$ và CP: $y - 1 = 0$

Trọng tâm $G = BN \cap CP$ có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$



Gọi $B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$.

Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = 0 \end{cases}$$

$B \in BN$ nên: $x_B - 2y_B + 1 = 0$ và $C \in CP$ nên: $y_C - 1 = 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = 0 \\ x_B - 2y_B + 1 = 0 \\ y_C - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -1 \\ x_C = 5 \\ y_C = 1 \end{cases}$. Vậy: $B(-3;-1), C(5;1)$

Phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC:

AB: $x - y + 2 = 0$; BC: $x - 4y - 1 = 0$ và AC: $x + 2y - 7 = 0$

Cách khác: Gọi D đối xứng với A qua G thì $D(1; -1)$, khi đó M là trung điểm của GD và BC nên tứ giác BDCG là hình bình hành. Suy ra: DC // BN và DB // CP

Phương trình đường thẳng DC: $x - 2y - 3 = 0$ và DB: $y + 1 = 0$

$B = BD \cap BN$ nên $B(-3; -1)$ và $C = DC \cap CP$ nên $C(5;1)$

Phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC:

AB: $x - y + 2 = 0$; BC: $x - 4y - 1 = 0$ và AC: $x + 2y - 7 = 0$

Bài 4. Cho tam giác ABC, biết $C(4;3)$ và phân giác trong, trung tuyến kẻ từ một đỉnh lần lượt có phương trình: $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác

Giải

Đặt d: $x + 2y - 5 = 0$

m: $4x + 13y - 10 = 0$

Thay $C(4;3)$ vào phương trình của d và m ta có:

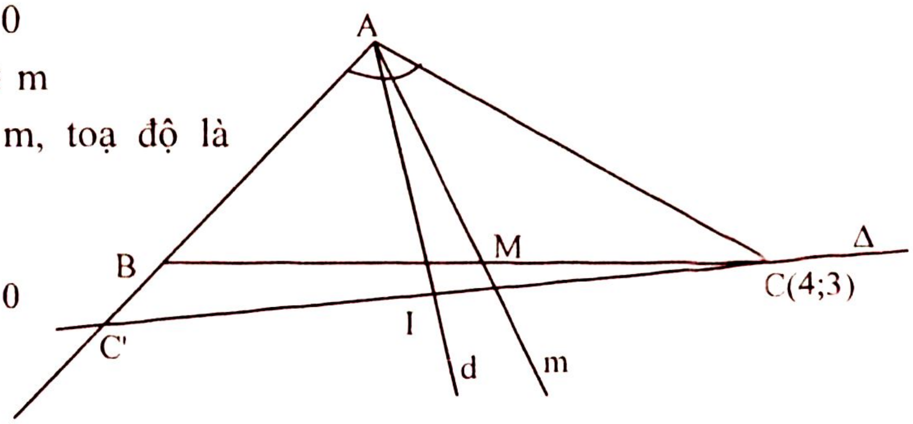
$4 + 6 - 5 = 5 \neq 0$

$16 + 39 - 10 \neq 0$

$\Rightarrow C \notin d$ và $C \notin m$

Gọi $A = d \cap m$, toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 13y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases}$$



Phương trình đường thẳng AC: $x + y - 7 = 0$

Đường thẳng Δ đi qua C, vuông góc với d có phương trình:

$2x - y - 5 = 0$

Gọi $I = d \cap \Delta$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Gọi C' đối xứng với C qua d thì I là trung điểm của CC'.

Suy ra: C'(2;−1) ∈ AB

Đường thẳng AB đi qua hai điểm A và C' có phương trình:

$x + 7y + 5 = 0$

Gọi $B(x_B;y_B)$, trung điểm M của BC thuộc trung tuyến m

Suy ra: $\begin{cases} x_B + 7y_B + 5 = 0 \\ 4\left(\dfrac{4+x_B}{2}\right) + 13\left(\dfrac{3+y_B}{2}\right) - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -12 \\ y_B = 1 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng BC: $x - 8y + 20 = 0$

Bài 5. Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, các đỉnh A(2; −3), B(3; −2) và trọng tâm tam giác thuộc đường thẳng d: $3x - y - 4 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C

Giải

Gọi $C(x_1; y_1)$ và G là trọng tâm ΔABC, ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{5+x_1}{3} \\ y_G = \dfrac{-5+y_1}{3} \end{cases}$ và G ∈ d

nên: $3x_1 - y_1 - 4 = 0$ (*)

Phương trình đường thẳng AB: $x - y - 5 = 0$ và $AB = \sqrt{2}$

Gọi $h = d(C, AB) = \dfrac{|x_1 - y_1 - 5|}{\sqrt{2}}$ nên $S = dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}h.AB \Rightarrow h = \dfrac{2S}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Suy ra: $\dfrac{|x_1 - y_1 - 5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - y_1 = 8 \\ x_1 - y_1 = 2 \end{array}\right.$. Kết hợp với (*) ta có: C(−2; −10) hoặc C(1; −1)

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với d, đường cao BH: $x + y + 3 = 0$ và trung điểm cạnh AC là M(1; 1). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

Bài 2. Phương trình hai cạnh của một tam giác là $5x - 2y + 6 = 0$ và $4x + 7y - 21 = 0$.

Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác biết trực tâm trùng với gốc toạ độ

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết A(1;2), B(3;4), $\cos A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ và $\cos B = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

a. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với trục Oy. Tính góc giữa đường thẳng d và đường thẳng AB

b. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC

Bài 4. Cho tam giác ABC, biết $A(-1;-3)$, đường trung trực cạnh AB: $3x + 2y - 4 = 0$ và trọng tâm của tam giác $G(4;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C

Bài 5. Cho tam giác ABC, biết đỉnh $A(1; 1)$ các đường cao qua đỉnh B và C lần lượt có phương trình: $-2x + y - 8 = 0$ và $2x + 3y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa đường cao qua đỉnh A và xác định toạ độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Bài 6. Cho điểm $A(1; 1)$ và đường thẳng d: $4x + 3y - 12 = 0$

a. Gọi B, C lần lượt là giao điểm của d với các trục Ox, Oy. Xác định toạ độ trực tâm của tam giác ABC.

b. Cho điểm M chạy trên đường thẳng d. Trên nửa đường thẳng đi qua A và M lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 4$. Điểm N chạy trên đường cong nào? Viết phương trình đường cong đó.

Bài 7. Cho tam giác ABC, biết đỉnh $A(2; -1)$ và phương trình các đường phân giác trong kẻ từ B và C lần lượt có phương trình: d_1: $x - 2y + 1 = 0$ và d_2: $x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Bài 8. Cho tam giác ABC, biết các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt có phương trình: $3x + y - 7 = 0$ và $x + y - 5 = 0$ và đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn (C): $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 10$ tại trung điểm M của cạnh BC. Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 9. Cho tam giác ABC biết đường cao, đường trung tuyến qua đỉnh B lần lượt có phương trình: $x - 2y - 5 = 0$, $14x - 13y - 10 = 0$ và đường phân giác trong góc A là: $x - 2 = 0$.Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC biết $M(-2;2)$ là trung điểm cạnh BC. Cạnh AB, AC lần lượt có phương trình: $x - 2y - 2 = 0$, $2x + 5y + 3 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 11. Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(2; 0)$. Tính diện tích tam giác ABC và tìm toạ độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất.

Bài 12. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 1)$, đường cao BH: $x - 3y - 7 = 0$, trung tuyến CM: $x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C

Bài 13. (Khối B – 2003) Cho tam giác ABC có AB = AC và $\widehat{BAC} = 90^0$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

Bài 14. Cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2; 0)$, phương trình các cạnh AB: $4x + y + 14 = 0$, AC: $2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

Bài 15. (Khối B – 2008) Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1; -1)$, đường phân giác trong góc A có phương trình: $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ đỉnh B có phương trình: $4x + 3y - 1 = 0$.

Bài 16.(Khối D– 2009) Cho tam giác ABC có $M(2; 0)$ là trung điểm cạnh AB. Đường trung tuyến, đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình: $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Bài 17. (CĐ– 2009) Cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường cao kẻ từ đỉnh B lần lượt có phương trình: $5x + y - 9 = 0$ và $x + 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.

Bài 18. Cho tam giác ABC có $N(6; 9)$ là trung điểm cạnh BC, các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B, C lần lượt có phương trình: $x + y - 12 = 0$ và $4x - 5y + 18 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Đường thẳng AC đi qua M, vuông góc với BH có phương trình: $x - y = 0$

$A = AC \cap d$ nên $A\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Điểm C đối xứng với A qua M nên $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$

Đường thẳng BC đi qua C, song song với đường thẳng d có phương trình: $x - 4y + 8 = 0$

$B = BC \cap BH$ nên $B(-4;1)$.

Bài 2. Đặt AB: $5x - 2y + 6 = 0$ và AC: $4x + 7y - 21 = 0$ thì $A = AB \cap AC$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}5x - 2y + 6 = 0\\4x + 7y - 21 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\y = 3\end{cases}$

Đường cao OC đi qua O, vuông góc với AB có phương trình: $2x + 5y = 0$

$C = OC \cap AC$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x + 5y = 0\\4x + 7y - 21 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{35}{2}\\y = -7\end{cases}$

Đường thẳng chứa cạnh BC, đi qua C và vuông góc với OA có phương trình: $y + 7 = 0$

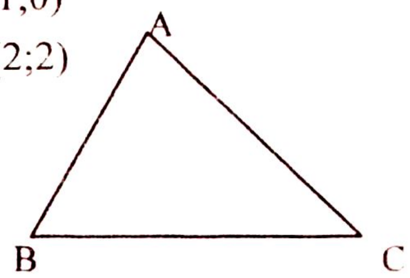
Bài 3.

a. Ta có d // Oy nên vectơ pháp tuyến của d là $\vec{i} = (1;0)$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB} = (2;2)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1)$

$\cos(d,AB) = \frac{|\vec{i}.\vec{n}|}{|\vec{i}|.|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d,AB) = 45^\circ$



b. Phương trình đường thẳng AB: $x - y + 1 = 0$

Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\vec{n}_1 = (a_1;a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

Ta có: $\cos A = \dfrac{2}{\sqrt{5}} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o \Rightarrow 0^o < A < 45^o$

Suy ra: $\cos A = \dfrac{|\vec{n}.\vec{n}_1|}{|\vec{n}|.|\vec{n}_1|} = \dfrac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{2}.\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a_1^2 + 3a_2^2 + 10a_1a_2 = 0$

$\Rightarrow 3\left(\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_1}\right) + 10 = 0$ (do $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$). Đặt $t = \dfrac{a_1}{a_2}$

$$\Rightarrow 3\left(t + \frac{1}{t}\right) + 10 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{3} \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_2 = -3a_1 \\ a_1 = -3a_2 \end{array}\right.$$

Vậy $\vec{n}_1 = (1;-3)$ hoặc $\vec{n}_1 = (-3;1)$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC: $x - 3y + 5 = 0$

hoặc: $3x - y - 1 = 0$

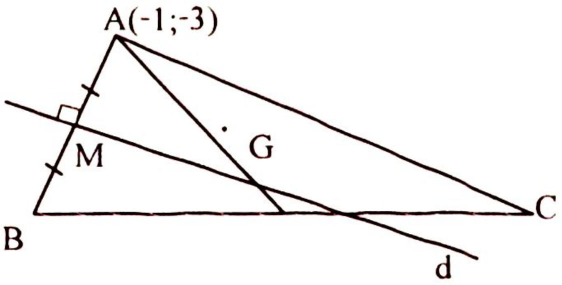
Gọi $\vec{n}_2 = (b_1;b_2)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC với $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$

Ta có: $\cos B = \dfrac{3}{\sqrt{10}} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o \Rightarrow 0^o < B < 45^o$

Suy ra: $\cos B = \dfrac{|\vec{n}.\vec{n}_2|}{|\vec{n}|.|\vec{n}_2|} = \dfrac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 2b_1^2 + 5b_1b_2 + 2b_2^2 = 0$

Suy ra: $b_2 = -2b_1$ hoặc $b_1 = -2b_2$ nên $\vec{n}_2 = (1;-2)$ hoặc $\vec{n}_2 = (-2;1)$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC: $2x - y - 2 = 0$ hoặc $x - 2y + 5 = 0$.



Bài 4. Gọi $B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$, d là đường trung trực cạnh AB nên trung điểm M của AB thuộc d

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{d} = (-2;3)$ và $M \in d$

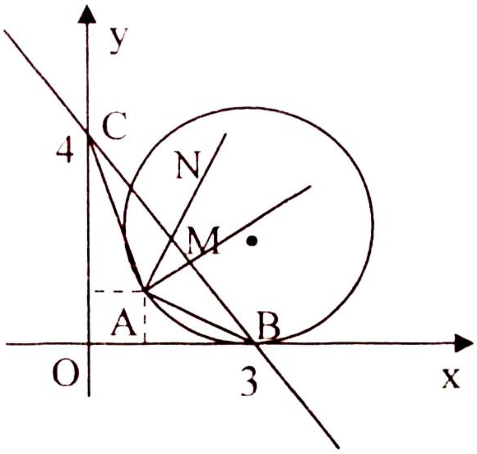
Suy ra:

$$\begin{cases} (x_B + 1)(-2) + (y_B + 3)3 = 0 \\ 3\left(\dfrac{-1 + x_B}{2}\right) + 2\left(\dfrac{-3 + y_B}{2}\right) - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = 1 \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} x_C + x_A + x_B = 3x_G \\ y_C + y_A + y_B = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 8 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = -4 \end{cases}$

Vậy: B(5;1) và C(8;−4)

Bài 5. Trực tâm H có toạ độ là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} -2x + y - 8 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow H(-\frac{9}{4}; \frac{7}{2})$$

Phương trình đường cao AH:

$10x + 13y - 23 = 0$

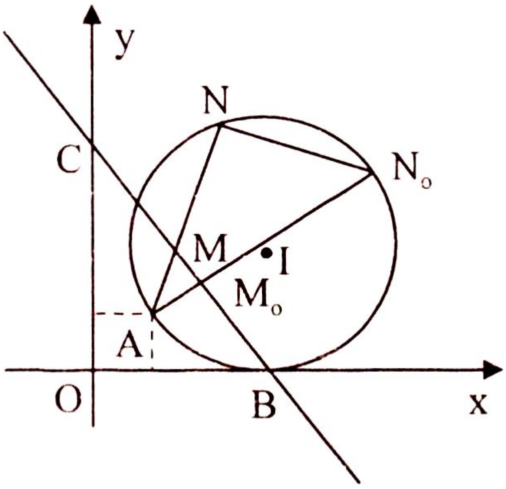
Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB:

$3x - 2y - 1 = 0$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC: $x + 2y - 3 = 0$

Toạ độ các đỉnh B (–17; –26) và C(3; 0)

Bài 6.



a. Toạ độ các điểm B(3; 0) và C(0; 4)

Gọi H (x; y) ta có $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y - 1)$

$\overrightarrow{BC} = (-3; 4)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 3; y)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 3)$

H là trực tâm ΔABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy H (–3; –2)

b. Gọi $M_0 \in d$ sao cho $AM_0 \perp d$, $AM_0 = d(A, d) = 1$

N_0 thuộc tia AM_0 sao cho $\overrightarrow{AM_0}.\overrightarrow{AN_0} = 4$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM_0}.\overrightarrow{AN_0} = AM_0.AN_0 = 4 \Rightarrow AN_0 = 4$

Với $M \in d$ và N thuộc tia AM ta có:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = AM.AN = 4$

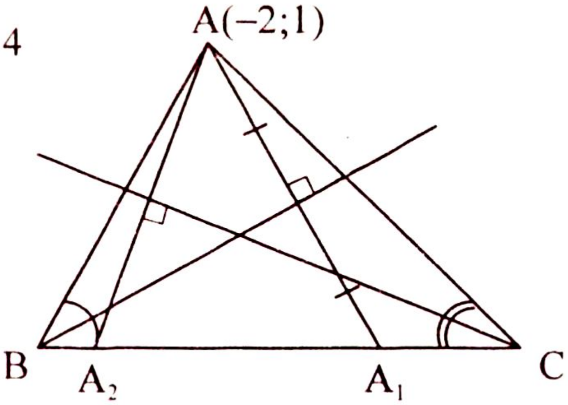
Suy ra $AM_0.AN_0 = AM.AN$

$\Leftrightarrow \dfrac{AM}{AN_0} = \dfrac{AM_0}{AN} \Rightarrow \Delta AMM_o \sim \Delta AN_oN$

$\Rightarrow \widehat{AM_0M} = \widehat{ANN_o} = 90^o$

Vậy N nhìn AN_o dưới một góc vuông nên N thuộc đường tròn (C) đường kính AN_o

Gọi I là trung điểm AN_0, ta có $AI = \dfrac{AN_0}{2} = 2$.



Suy ra I đối xứng với A qua d nên $I\left(\frac{13}{5};\frac{11}{5}\right)$

Phương trình đường tròn (C): $\left(x-\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{11}{5}\right)^2=4$

Bài 7. Gọi A_1; A_2 lần lượt đối xứng với A qua phân giác góc C, góc B

Ta có: $A_1(-2;-5)$ và $A_2(0;3)$ thuộc đường thẳng BC phương trình đường thẳng chứa cạnh BC: $4x-y-3=0$

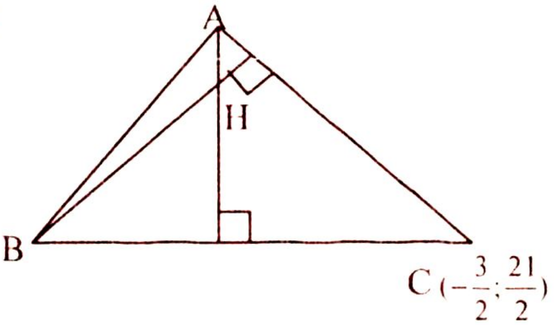
Bài 8. Ta có: AH: $3x+y-7=0$ và BH: $x+y-5=0$

Tâm và bán kính của (C) là $I(-2;7)$ và $R=\sqrt{10}$

Phương trình đường thẳng BC có dạng:

$x-3y+c=0$

và BC tiếp xúc với đường tròn (C) nên



$$d(I,BC)=R\Leftrightarrow\frac{|-2-21+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow|c-23|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=33\\c=13\end{array}\right.$$

Đường thẳng d đi qua I, song song với đường thẳng AH có phương trình: $3x+y-1=0$

* Khi đường thẳng BC có phương trình: $x-3y+33=0$

$B=BC\cap BH$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-3y+33=0\\x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{9}{2}\\y=\frac{19}{2}\end{cases}$$

Tiếp điểm $M=BC\cap d$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-3y+33=0\\3x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=10\end{cases}$$

Tọa độ điểm C: $\begin{cases}x_C=2x_M-x_B=-\frac{3}{2}\\y_C=2y_M-y_B=\frac{21}{2}\end{cases}$

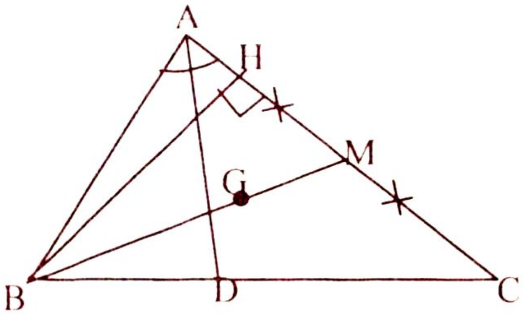
Đường thẳng AC đi qua C, vuông góc với đường thẳng BH có phương trình : $x-y+12=0$

$A=AC\cap AH$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y+12=0\\3x+y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{4}\\y=\frac{43}{4}\end{cases}$$

Tọa độ trọng tâm G$\left(-\frac{}{12};\frac{}{4}\right)$

* Khi đường thẳng BC có phương trình: x – 3y + 13 = 0, làm tương tự ta có tọa độ điểm G$\left(-\frac{7}{12};-\frac{7}{36}\right)$



Bài 9. Ta có: Đường cao BH: x – 2y – 5 = 0

trung tuyến BM: 14x – 13y – 10 = 0

B = BM∩ BH, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}14x-13y-10=0\\ x-2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases}$$

Phân giác trong góc A là AD: x – 2 = 0. Gọi B_1 đối xứng với B qua đường thẳng AD thì $B_1 \in AC$ và $B_1(7; -4)$.

Đường thẳng AC đi qua B_1 và vuông góc với BH có phương trình:

2x + y – 10 = 0

M = BM∩ AC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}14x-13y-10=0\\ 2x+y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=3\end{cases}$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GM}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{4}{3}\\ y_G=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Bài 10. Ta có: A = AB ∩ AC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-2y-2=0\\ 2x+5y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{9}\\ y=-\dfrac{7}{9}\end{cases}$$

Đường thẳng d đi qua M, song song với AB có phương trình:

x – 2y + 6 = 0

Gọi N = d ∩ AC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-2y+6=0\\ 2x+5y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\ y=1\end{cases}$$

Điểm C đối xứng với A qua N nên C$\left(-\frac{76}{9};\frac{25}{9}\right)$

Điểm B đối xứng với C qua M nên B$\left(\frac{40}{9};\frac{11}{9}\right)$

Cách khác. Ta có: Ta có: A = AB $\cap$ AC nên $A\left(\frac{4}{9};-\frac{7}{9}\right)$

Xét phép đối xứng tâm M là $D_M : I(x,y) \mapsto I'(x',y') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MI'}$

Suy ra biểu thức giải tích của phép đối xứng D_M là: $\begin{cases} x' = -x-4 \\ y' = -y+4 \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} x = -x' - 4 \\ y = -y' + 4 \end{cases}$

D$_M$: AB $\mapsto$ d$_1$: x – 2y +14 = 0. và D$_M$: B $\in$AB $\mapsto$ C $\in$d$_1$ mà C $\in$AC nên: C = d$_1$ $\cap$ AC, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 14 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{76}{9} \\ y = \dfrac{25}{9} \end{cases}$$

D$_M$: C $\mapsto$ B nên B$\left(\frac{40}{9};\frac{11}{9}\right)$

Bài 11. Ta có: Phương trình đường thẳng AB: x – y = 0 và AB = $2\sqrt{2}$

$h = d(C,AB) = \dfrac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ nên $dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}AB.h = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = 2$ (đvdt)

Gọi M(m; 0) thuộc trục hoành và $\overrightarrow{AM} = (m-1;-1)$, $\overrightarrow{BM} = (m-3;-3)$

Các đường thẳng AM, BM lần lượt có hệ số góc là: $k_1 = \dfrac{1}{1-m}$, $k_2 = \dfrac{3}{3-m}$

Ta có: $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất khi và chi khi $\tan\left(\widehat{AMB}\right)$ có giá trị lớn nhất

$$\tan\left(\widehat{AMB}\right) = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1k_2|} = \frac{2|m|}{|m^2 - 4m + 6|} = \frac{2|m|}{m^2 - 4m + 6}$$

* Khi m > 0 ta có: $y = \dfrac{2m}{m^2 - 4m + 6} \Rightarrow ym^2 - 2m(2y+1) + 6y = 0$ có nghiệm

Ta có: Khi y = 0 thì –2m = 0 $\Leftrightarrow$ m = 0 (loại)

Khi y $\neq$ 0, phương trình có nghiệm thì :

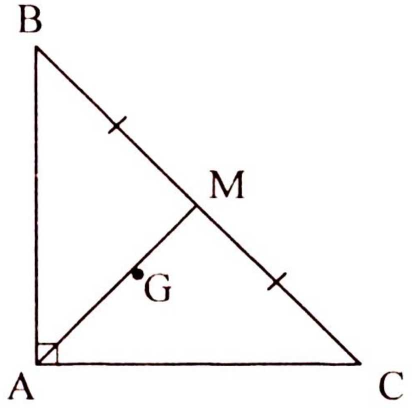
$$\Delta' = (2y+1)^2 - 6y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 4y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq y \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\text{Max}(y) = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ khi $m = \dfrac{2y+1}{y} = \sqrt{6}$ nên $M\left(\sqrt{6};0\right)$

Bài 12. Đường thẳng AC đi qua A, vuông góc với BH có phương trình: $3x + y - 7 = 0$

$C = AC \cap CM$ nên $C(4;-5)$. Gọi $B(3y+7;y) \in BH$ và trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\dfrac{3y+13}{3};\dfrac{y-4}{3}\right) \in CM$ nên $y = -3 \Rightarrow B(-2;-3)$

Bài 13. G là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC nên: $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow A(0;2)$



ΔABC vuông cân tại A nên $AM \perp BC$

phương trình đường thẳng BC: $-x + 3y + 4 = 0$

$MB = MC = MA = \sqrt{10}$ nên B, C thuộc đường tròn tâm M, bán kính $R = \sqrt{10}$, toạ độ của B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10\\ -x + 3y + 4 = 0\end{cases}$$

Suy ra B(4; 0), C(−2; −2) hoặc B(−2; −2) và C(4; 0)

Bài 14. Ta có: $A = AB \cap AC$ nên A(−4; 2).

Gọi $B(x;-4x-14) \in AB; C\left(1-\dfrac{5y}{2};y\right) \in AC$

Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{5y}{6}-1;\dfrac{y}{3}-\dfrac{4x}{3}-4\right)$

nên $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{5y}{6}-1=-2\\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{4x}{3}-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=0\end{cases}$ nên B(−3;−2) và B(1; 0)

Bài 15. Gọi đường cao BB_1: $4x + 3y - 1 = 0$.

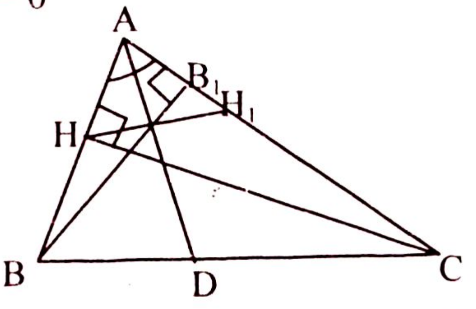
Phân giác trong AD: $x - y + 2 = 0$

Và H_1 đối xứng với H qua AD thì $H_1 \in AC$ nên $H_1(-3;1)$

Phương trình đường thẳng AC: $3x - 4y + 13 = 0$

$A = AD \cap AC$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x - y + 2 = 0\\ 3x - 4y + 13 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 5\\ y = 7\end{cases}$$



Đường cao CH đi qua H, vuông góc với $\overrightarrow{HA} = (6;8)$ có phương trình:

$3x + 4y + 7 = 0$

$C = AC \cap CH$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ 3x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ vậy } C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$$

Bài 16. Gọi đường cao AH: $6x - y - 4 = 0$ và trung tuyến AN: $7x - 2y - 3 = 0$

Ta có: $A = AH \cap AN$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x - y - 4 = 0 \\ 7x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

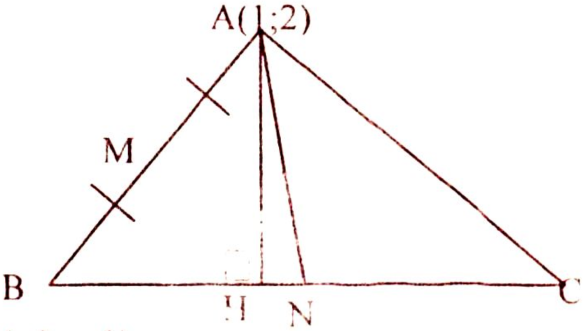
M là trung điểm của AB nên B đối xứng với A qua M. Suy ra: B(3; –2)

Đường thẳng BC đi qua B, vuông góc với AH có phương trình:

$x + 6y + 9 = 0$

Gọi $N = BC \cap AN$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 6y + 9 = 0 \\ 7x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$



Ta có: N là trung điểm của BC nên C(–3; –1).

Đường thẳng AC đi qua hai điểm A, C có phương trình: $3x - 4y + 5 = 0$

Bài 17. Trung tuyến AM: $5x + y - 9 = 0$ và đường cao BH: $x + 3y - 5 = 0$

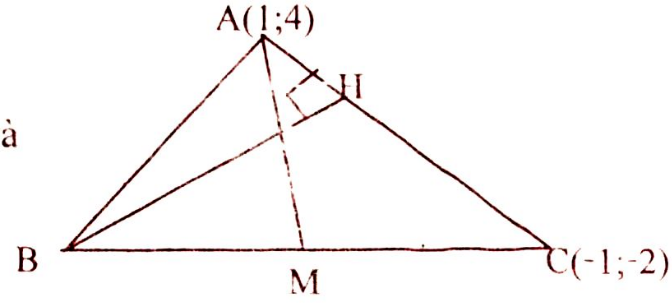
Đường thẳng AC đi qua C, vuông góc với BH có phương trình:

$3x - y + 1 = 0$

$A = AC \cap AM$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

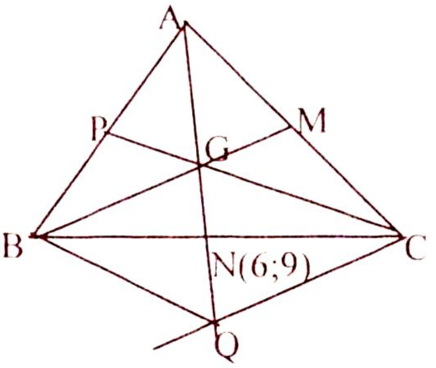
$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 5x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ta có: $B \in BH$ nên B(5– 3b; b) và M là trung điểm BC nên M $\left(\frac{4-3b}{2};\frac{b-2}{2}\right)$



Ta có: $M \in AM$ nên $5\left(\frac{4-3b}{2}\right) + \frac{b-2}{2} - 9 = 0 \Leftrightarrow b = 0$ nên B(5; 0)

Bài 18. Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $G = BM \cap CP$, tọa độ là nghiệm của hệ



Phương trình: $\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ 4x - 5y + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} \\ y = \dfrac{22}{3} \end{cases}$

Gọi Q đối xứng với G qua N thì $Q\left(\dfrac{22}{3}; \dfrac{32}{3}\right)$ và tứ giác BGCQ là hình bình hành

Suy ra: CQ // BG và BQ // CG

Phương trình đường thẳng CQ: $x + y - 18 = 0$ và $C = CQ \cap CP$

$\Rightarrow C(8; 10)$

Phương trình đường thẳng BQ: $4x - 5y + 24 = 0$ và $B = BQ \cap BM$

$\Rightarrow B(4; 8)$

Điểm A đối xứng với Q qua G nên A(2; 4)

1.2. Tam giác đặc biệt

* Tam giác ABC cân đỉnh A thì AB = AC và đường cao AH ($H \in BC$) là trục đối xứng của tam giác

* Tam giác ABC đều thì AB = AC = BC và bất cứ đường cao nào của tam giác cũng là trục đối xứng của tam giác. Trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác trùng nhau

* Tam giác ABC vuông tại A thì $AB \perp AC$ và đường trung tuyến $AM = \dfrac{1}{2}BC$ ($M \in BC$)

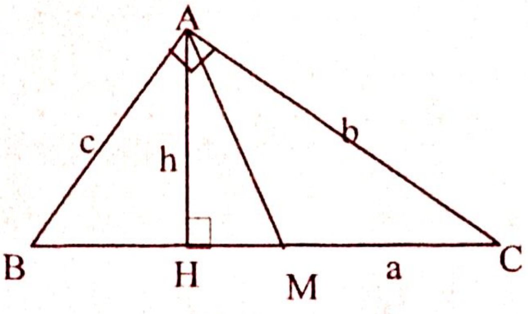
Các hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Pitago)

$AB^2 = BH.BC$, $AC^2 = CH.BC$,

$AH^2 = BH.CH$, $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

$dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}AH.BC$



* Tam giác ABC vuông cân tại A thì $AB \perp AC$ và AB = AC

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^0$

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho hai điểm A(−1; 2), B(3; 1) và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Tìm tọa độ đỉnh C thuộc đường thẳng Δ sao cho:

a. Tam giác ABC vuông b. Tam giác ABC cân.

c. Tam giác ABC đều

Giải

Ta có: A, B không thuộc đường thẳng Δ và gọi $C(1+t;2+t)\in\Delta$

$\overrightarrow{AB}=(4;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(t+2;t)$ và $\overrightarrow{BC}=(t-2;t+1)$

a. Tam giác ABC vuông.

*ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 4(2+t)-t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{8}{3}$

nên $C\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

*ΔABC vuông tại B $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 4(t-2)-t-1=0\Leftrightarrow t=3$

nên $C(4;5)$

*ΔABC vuông tại C

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow (t+2)(t-2)+t(t+1)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$ nên

$C\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4};\dfrac{7+\sqrt{33}}{4}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{4};\dfrac{7-\sqrt{33}}{4}\right)$

b. Tam giác ABC cân

*ΔABC cân tại A

$\Leftrightarrow AB=AC\Leftrightarrow AB^2=AC^2\Leftrightarrow 17=(t+2)^2+t^2\Leftrightarrow 2t^2+4t-13=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-2\pm\sqrt{30}}{2}$ nên $C\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2};\dfrac{2+\sqrt{30}}{2}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{-\sqrt{30}}{2};\dfrac{2-\sqrt{30}}{2}\right)$

*ΔABC cân tại B

$\Leftrightarrow AB=BC\Leftrightarrow AB^2=BC^2\Leftrightarrow 17=(t-2)^2+(t+1)^2\Leftrightarrow t^2-t-6=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-2\end{array}\right.$ nên $C(4;5)$ hoặc $C(-1;0)$

*ΔABC cân tại C

$\Leftrightarrow AC=BC\Leftrightarrow AC^2=BC^2\Leftrightarrow (t+2)^2+t^2=(t-2)^2+(t+1)^2\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{6}$

nên $C\left(\dfrac{7}{6};\dfrac{13}{6}\right)$

c. Tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow\begin{cases}AC=BC\\AC=AB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AC^2=BC^2\\AC^2=AB^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(t+2)^2+t^2=(t-2)^2+(t+1)^2\\(t+2)^2+t^2=17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{6}\\t=\dfrac{-2\pm\sqrt{30}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow t\in\varnothing$$ nên không có điểm C

Bài 2. Cho điểm A(2; 1) và hai đường thẳng d_1: $x + 2y - 2 = 0$, d_2: $x - 2y + 2 = 0$. Tìm các điểm B, C lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Giải

Phép quay Q (A; 90^0), Q (A; -90^0) lần lượt có biểu thức giải tích là:

$$\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x - 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$$

Phép quay Q (A; 90^0): $d_1 \to a_1$, phương trình đường thẳng a_1:

$-2x + y + 5 = 0$

Q (A; 90^0): $B \in d_1 \to C \in a_1$ và $C \in d_2$ nên tọa độ của C là nghiệm của

hệ: $\begin{cases} -2x + y + 5 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C\,(4; 3)$

Q (A; -90^0) : C → B thì $B(4; -1) \in d_1$

Phép quay Q (A; -90^0) : $d_1 \to a_2$, phương trình đường thẳng a_2:

$2x - y - 1 = 0$

Q (A; -90^0): $B \in d_2 \to C \in a_2$ và $C \in d_2$ nên tọa độ của C là nghiệm của

hệ: $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$

Q (A; 90^0): C → B thì $B\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right) \in d_1$

Vậy $B(4; -1)$, $C(4; 3)$ hoặc $B\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$

Bài 3. Cho điểm A(4; 4). Tìm các điểm B, C lần lượt thuộc trục hoành, trục tung sao cho tam giác ABC đều.

Giải

Phương trình trục hoành, trục tung lần lượt là Ox: $y = 0$; Oy: $x = 0$

Phép quay Q (A; 60^0)có biểu thức giải tích là:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y\sqrt{3}}{2} + 2\left(1 + \sqrt{3}\right) \\ y' = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} + 2\left(1 - \sqrt{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} + \dfrac{\sqrt{3}y'}{2} + 2\left(1 - \sqrt{3}\right) \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}x'}{2} + \dfrac{y'}{2} + 2\left(1 + \sqrt{3}\right) \end{cases}$$

Phép quay Q (A; -60^0) có biểu thức giải tích là

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}y}{2} + 2\left(1-\sqrt{3}\right) \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \dfrac{y}{2} + 2\left(1+\sqrt{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} - \dfrac{\sqrt{3}y'}{2} + 2\left(1+\sqrt{3}\right) \\ y = \dfrac{\sqrt{3}x'}{2} + \dfrac{y'}{2} + 2\left(1-\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

* Phép quay Q (A; 60^0): Ox → d_1, phương trình đường thẳng d_1:
$-\sqrt{3}x + y + 4(1+\sqrt{3}) = 0$

Q (A; 60^0): B ∈ Ox → C ∈ d_1 và C ∈ Oy nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -\sqrt{3}x + y + 4(1+\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 - 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C\,(0;\, -4 - 4\sqrt{3})$$

Q (A; -60^0) : C → B thì B($-4 - 4\sqrt{3}$; 0) ∈ Ox

* Phép quay Q (A; -60^0): Ox → d_2, phương trình đường thẳng d_2:
$\sqrt{3}x + y + 4\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$

Q (A; -60^0): B ∈ Ox → C ∈ d_2 và C ∈ Oy nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}x + y + 4(1-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4\sqrt{3} - 4 \end{cases} \Rightarrow C\,(0;\, 4\sqrt{3} - 4)$$

Q (A; -60^0) : C → B thì B($4\sqrt{3} - 4$; 0) ∈ Ox

Vậy B($-4 - 4\sqrt{3}$; 0), C(0; $-4 - 4\sqrt{3}$) hoặc B($4\sqrt{3} - 4$; 0), C (0; $4\sqrt{3} - 4$)

Cách khác: Gọi B(x; 0) ∈ Ox và C(0; y) ∈ Oy

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(x-4; -4\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-4; y-4\right)$ và $\overrightarrow{BC} = \left(-x; y\right)$

Tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 = AB^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + \left(y-4\right)^2 = 16 + \left(x-4\right)^2 \\ 16 + \left(y-4\right)^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

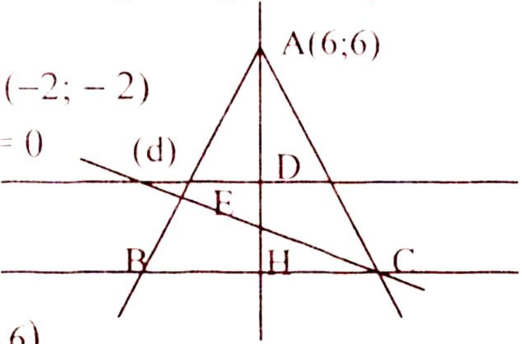
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y-4\right)^2 = \left(x-4\right)^2 \\ x^2 = 32 - 8y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ x^2 + 8x - 32 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 8 \\ x^2 - 8x + 32 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -4 \pm 4\sqrt{3} \\ x, y \in \varnothing \end{array}\right.$$

Vậy B($-4 - 4\sqrt{3}$; 0), C(0; $-4 - 4\sqrt{3}$) hoặc B($4\sqrt{3} - 4$; 0), C (0; $4\sqrt{3} - 4$)

Bài 4.(A–2010) Cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6; 6); đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB, AC có phương trình: x + y − 4 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, biết điểm E(1; −3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đó.

Giải

Gọi H là trung điểm BC và D là trung điểm của AH, ta có: AH ⊥BC nên đường thẳng AH đi qua A, vuông góc với đường thẳng d: x + y − 4 = 0 có phương trình:



x − y = 0 ⇒ D= AH ∩ d nên D(2; 2) ⇒ H(−2; − 2)

Phương trình đường thẳng BC: x + y + 4 = 0

Gọi $C(x;-x-4)\in BC\Rightarrow B(-4-x;x)$

(H là trung điểm BC)

Ta có: $\overrightarrow{EC}=(x-1;-x-1);\overrightarrow{AB}=(-x-10;x-6)$

$$CE\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.$$

Vậy C(2; −6), B(−6; 2) hoặc C(−4; 0), B(0; −4)

Bài 5.(B–2010) Cho tam giác ABC vuông tại A có đỉnh C(−4; 1); phân giác trong góc A có phương trình: x + y − 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương

Giải

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua phân giác trong góc A thì $C_1(4; 9)\in AB$

Tam giác ABC vuông tại A nên $C_1A\perp AC$.

Gọi A(x; 5 − x) ∈d: x + y − 5 = 0

$$\overrightarrow{C_1A}=(x-4;-x-4);\overrightarrow{CA}=(x+4;4-x)\text{ và }\overrightarrow{C_1A}\perp\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{C_1A}.\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-4\end{array}\right.$$

Do A có hoành độ dương nên A(4; 1) và AC = 8

$$dt(\Delta ABC)=\frac{1}{2}AB.AC=4AB=24\Rightarrow AB=6.$$

Gọi B(x; y) và $\overrightarrow{AB}=(x-4;y-1);\overrightarrow{CA}=(8;0)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CA}\\AB=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=0\\AB^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8(x-4)=0\\(x-4)^2+(y-1)^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\y=-5\end{cases}\end{array}\right.$$

nên B(4; 7) hoặc B(4;−5)

Do B, C nằm khác phía đối với đường phân giác trong góc A nên B(4; 7)

Phương trình đường thẳng BC: 3x − 4y + 16 = 0

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là: $x - y - 5 = 0$ và $x - 3y - 1 = 0$. Đường thẳng AC đi qua điểm $M(-4;1)$. Tìm toạ độ đỉnh C

Bài 2. (Dự bị B–06) Cho tam giác ABC cân tại B với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Đỉnh B thuộc đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.

Bài 3.(Dự bị 05) Cho tam giác cân ABC có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, phương trình BC: $x - 2y - 4 = 0$, BG: $7x - 4y - 8 = 0$.Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 4.(Dự bị 05) Cho tam giác ABC vuông ở A.Biết $A(-1;4)$, $B(1;-4)$ và đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$. Tìm đỉnh C.

Bài 5. Cho tam giác ABC có đỉnh $A\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$ và hai đường phân giác trong BB': $x - 2y - 1 = 0$, CC': $x + 3y - 1 = 0$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

Bài 6. (Khối A–2002) Cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 7. (Khối B – 2007) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm $A(2; 2)$ và các đường thẳng: d_1: $x + y - 2 = 0$, d_2: $x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các điểm Bvà C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

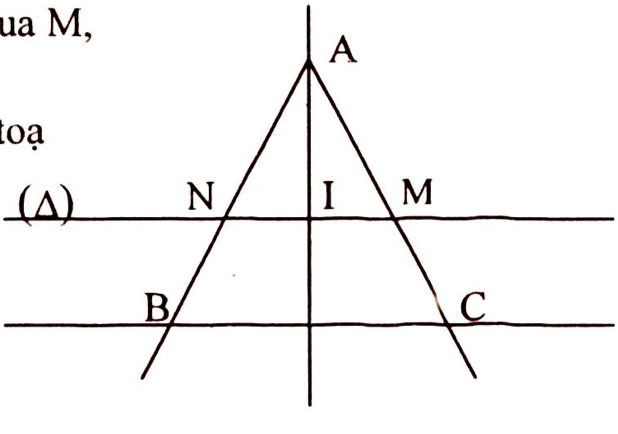
Bài 8. (Dự bị–D 04) Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $A(-1; 4)$, $B(1; -4)$, đường thẳng BC đi qua điểm $K\left(\frac{7}{3};2\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M, song song với BC: $x - 3y + 7 = 0$

Gọi N là giao điểm của Δ và AB, toạ độ N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 6 \end{cases}$$



Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN thì $I\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua I nhận $\overrightarrow{MN}=(15;5)$ làm vectơ pháp tuyến: $3x+y-14=0$

A là giao điểm của đường thẳng d và AB, toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x+y-14=0\\x-y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{19}{4}\\y=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{35}{4};\frac{5}{4}\right)\perp\vec{n}=(1;7)$.

Phương trình đường thẳng AM: $x+7y-3=0$

$C=AM\cap BC$, toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+7y-3=0\\x-3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

Vậy: $C\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

Bài 2. Gọi H là trung điểm của AC thì $H(2;2)$ và $BH\perp AC$

Phương trình đường thẳng BH: $x+3y-8=0$ nên $B=BH\cap d$

$\Rightarrow B\left(\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$

Phương trình đường thẳng AB: $23x-y-24=0$ và BC: $19x-13y+8=0$

Bài 3. Ta có: $B=BC\cap BG\Rightarrow B(0;-2)$. Gọi M là trung điểm của AC thì

$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\Rightarrow M\left(2;\frac{3}{2}\right)$

Gọi $C(2y+4;y)\in BC\Rightarrow A(-2y;3-y)$ nên $\overrightarrow{AC}=(4y+4;2y-3)$,

$\overrightarrow{BG}=\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$

* **Trường hợp 1.** Tam giác ABC cân tại đỉnh B thì

$BG\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\frac{4}{3}(4y+4)+\frac{7}{3}(2y-3)=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{6}$ nên

$C\left(\frac{13}{3};\frac{1}{6}\right);A\left(-\frac{1}{3};\frac{17}{6}\right)$

* **Trường hợp 2.** Tam giác ABC cân tại đỉnh A thì

$$AG \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -2 \end{array}\right.$$

nên $C(4;0); A(0;3)$; $C(0;-2); A(4;5)$

* **Trường hợp 3.** Tam giác ABC cân tại đỉnh C thì

$$CG \perp BA \Rightarrow \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow y \in \varnothing$$

Bài 4. Đường thẳng BC đi qua hai điểm B và M có phương trình: $9x - 2y - 17 = 0$. Tam giác ABC vuông ở A nên đường thẳng AC đi qua A, vuông góc với AB có phương trình: $x - 4y + 17 = 0$.

Tọa độ đỉnh $C = AC \cap BC \Rightarrow C(3;5)$

Bài 5. Gọi A_1, A_2 lần lượt đối xứng với A qua BB' và CC' thì A_1, A_2 thuộc đường thẳng BC

Ta có: Phép đối xứng qua đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$

$$S_\Delta : M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

$$\text{Nên} \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{14}{5} - 1\right)}{5} = 2 \\ y_1 = \dfrac{7}{5} + \dfrac{4\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{14}{5} - 1\right)}{5} = -1 \end{cases} \Rightarrow A_1(2;-1) \text{ và} \begin{cases} x_2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2\left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{21}{5} - 1\right)}{10} = 0 \\ y_2 = \dfrac{7}{5} - \dfrac{6\left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{21}{5} - 1\right)}{10} = -1 \end{cases} \Rightarrow A_2(0;-1)$$

Đường thẳng BC đi qua hai điểm A_1, A_2 có phương trình: $y + 1 = 0$

$B = BC \cap BB' \Rightarrow B(-1;-1)$ và $C = BC \cap CC' \Rightarrow C(4;-1)$

$\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{9}{5}; -\dfrac{12}{5}\right); \overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{16}{5}; -\dfrac{12}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp AC$ nên ΔABC vuông tại A.

Bài 6. Ta có: BC cắt Ox tại B (1; 0). Gọi A(a; 0) và $C\left(a; \sqrt{3}a - \sqrt{3}\right)$

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{2a+1}{3}; \dfrac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$

Cách 1:

Ta có AB = $|a-1|$; AC = $\sqrt{3}|a-1|$, BC = $2|a-1|$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = r\dfrac{(AB+AC+BC)}{2}$

$$\Rightarrow r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB+AC+BC} = \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2$$

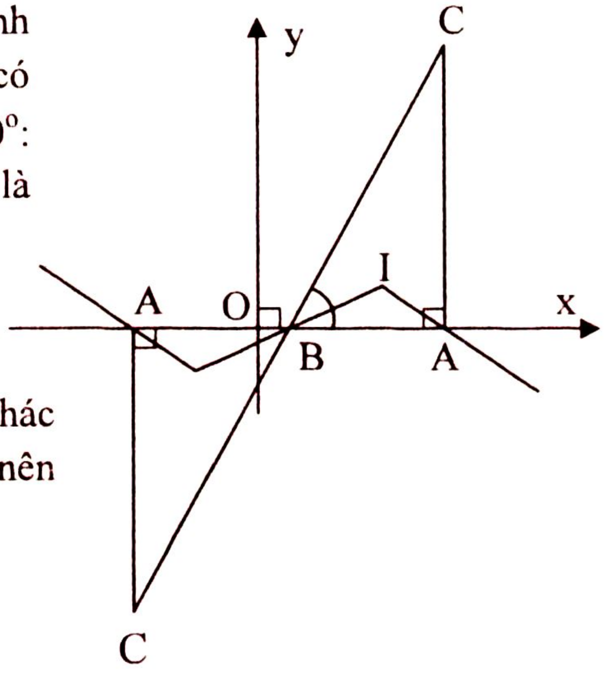
$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow |a-1| = 2\sqrt{3}+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2\sqrt{3}+3 \\ a = -2\sqrt{3}-1 \end{array}\right.$$

Vậy trọng tâm tam giác ABC là:

$$G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ hoặc } G_2\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Cách khác: Gọi $I(x_1; y_1)$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có r = 2 nên $y_1 = \pm 2$, phương trình của đường thẳng BC: $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ có hệ số góc $k = \sqrt{3} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = 60^o$: Phương trình phân giác trong góc B là BI: $y = \tan 30^o(x-1)$; $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$



$$\Rightarrow x_1 = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

* Trường hợp 1: Nếu A và O nằm khác phía đối với B thì $x_1 = 1+2\sqrt{3}$ nên $I\left(1+2\sqrt{3};2\right)$, $d(I, AC) = 2$

$$\Rightarrow a = 1+2\sqrt{3}+2 = 3+2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

*Trường hợp 2: Nếu A và O nằm cùng phía đối với điểm B thì $x_1 = 1-2\sqrt{3}$ nên $I\left(1-2\sqrt{3};-2\right)$;

$$d(I, AC) = 2 \Rightarrow a = -1-2\sqrt{3} \Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bài 7. Phép quay Q (A; 90^0), Q (A; -90^0) có biểu thức giải tích là:

$$\begin{cases} x' = -y + 4 \\ y' = x \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 4 \end{cases}$$

* Phép quay Q (A; 90^0): $d_1 \to a_1$, phương trình đường thẳng a_1:

$x - y - 2 = 0$

Q (A; 90^0): $B \in d_1 \to C \in a_1$ và $C \in d_2$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C\ (5; 3)$

Q (A; -90^0) : $C \to B$ thì $B(3; -1) \in d_1$

* Phép quay Q (A; -90^0) : $d_1 \to a_2$, phương trình đường thẳng a_2:

$x - y + 2 = 0$

Q (A; -90^0): $B \in d_2 \to C \in a_2$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3; 5)$$

Q (A; 90^0): $C \to B$ thì $B(-1; 3) \in d_1$

Vậy B(– 1; 3), C(3; 5) hoặc B(3; – 1), C (5; 3)

Cách khác. Ta có: $B \in d_1$ và $C \in d_2$ nên gọi B(b; 2– b) và C(c; 8 – c)

Tam giác ABC vuông cân tại A nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4) = 2 \\ (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \end{cases}$$

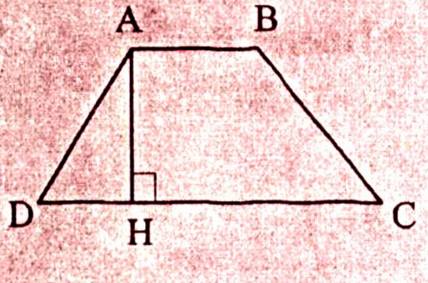
Đặt $\begin{cases} x = b - 1 \\ y = c - 4 \end{cases}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2; y = -1 \\ x = 2; y = 1 \end{array}\right.$

Suy ra: B(– 1; 3), C(3; 5) hoặc B(3; – 1), C (5; 3)

Bài 8. Phương trình AC: x – 4y + 17 = 0 và BC: 9x – 2y – 17 = 0.

$C = AC \cap BC \Rightarrow C(3; 5)$

2. Tìm tọa độ các đỉnh, viết phương trình đường thẳng chứa cạnh của tứ giác đặt biệt



2.1. Hình thang: Một tứ giác lồi có hai cạnh song song là hình thang

– Hình thang ABCD có AB // CD

và $S = \dfrac{AB + CD}{2}.AH$

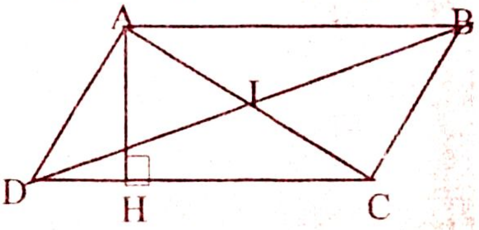
– Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông

– Hình thang có hai góc kề một cạnh đáy bằng nhau là hình thang cân. Trong hình thang cân thì hai đường chéo bằng nhau, đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đáy là trục đối xứng, hai cạnh bên bằng nhau, nội tiếp đường tròn.

2.2 Hình bình hành: Một tứ giác lồi có hai cặp cạnh song song với nhau là hình bình hành

– Hình bình hành ABCD có AB // CD, AB = CD; AD // BC, AD = BC

$S = DC.AH = DC.DA.\sin\widehat{ADC}$; Các góc đối bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



– Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật, trong hình chữ nhật thì hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

– Hình bình hành có hai cạnh liên liếp bằng nhau là hình thoi, trong hình thoi thì hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Diện tích hình thoi ABCD là $S = \dfrac{AC.DB}{2}$

– Hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau (hình thoi có một góc vuông) là hình vuông, trong hình vuông hai đường chéo vuông góc với nhau, bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho tam giác ABC, A(2; 4), B(4; 8), C(12; 2).

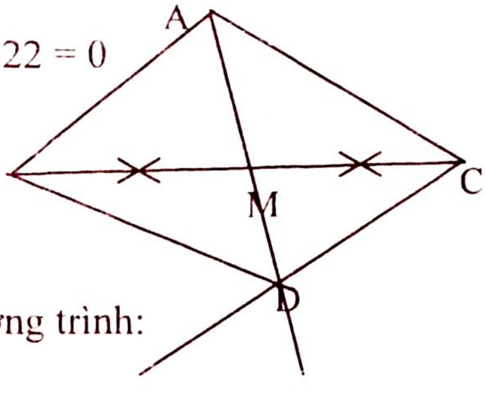
a. Viết phương trình đường trung tuyến AM ($M \in BC$) của tam giác ABC.

b. Xác định tọa độ đỉnh $D \in AM$ sao cho tứ giác ABDC là hình thang.

Giải

a. Gọi M là trung điểm cạnh BC thì M(8; 5)

Phương trình đường thẳng AM là: $x - 6y + 22 = 0$



b. Tứ giác ABDC là hình thang

* Trường hợp 1: AB // CD

Phương trình đường thẳng d đi qua C, song song với AB: $2x - y - 22 = 0$

$D = AM \cap d$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 6y + 22 = 0 \\ 2x - y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 6 \end{cases}$$

* Trường hợp 2: AC // BD

Phương trình đường thẳng d đi qua B, song song với AC: x +5y – 44 =0

D = AM $\cap$ d, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-6y+22=0 \\ x+5y-44=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=6 \end{cases}$$

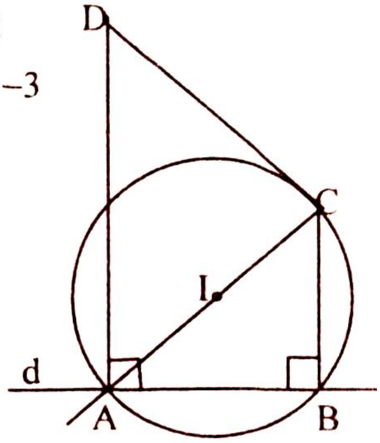
Bài 2. Cho đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ và đường thẳng d: x – 5y – 2 = 0. Gọi A, B là giao điểm của d với (C). Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang vuông ABCD (AD // BC, $\widehat{DAB}=90^0$), biết đỉnh C $\in$(C) và đỉnh D cách đường thẳng d một khoảng bằng $2\sqrt{26}$.

Giải

Hình thang vuông ABCD có AD // BC và $\widehat{DAB}=90^0$ nên $\widehat{ABC}=90^0$

Tọa độ của A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=13 \\ x-5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y=0 \\ x=5y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0; x=2 \\ y=-1; x=-3 \end{array}\right.$$



Nên A(2; 0), B(–3; –1) hoặc A(–3; –1), B(2; 0)

Trường hợp 1. Khi A(2; 0), B(–3; –1)

Điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I(–1; 2) của (C) nên C(–4; 4) Ta có: AD $\perp$ AB nên đường thẳng AD đi qua A, vuông góc với AB có phương trình : 5x + y –10 = 0

Gọi D(x; 10 – 5x) $\in$AD

và $d(D,AB)=\dfrac{|26x-52|}{\sqrt{26}}=2\sqrt{26} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \end{array}\right.$ nên D_1(4; –10) hoặc D_2(0; 10).

Tứ giác ABCD là hình thang vuông nên D, C cùng phía đối với đường thẳng AB.

Ta có: $d(D_1)=52$, $d(D_2)=-52$ và $d(C)=-26$ nên $d(D_2)d(C)>0$. Vậy điểm D(0; 10)

Trường hợp 2. Khi A(–3; –1), B(2; 0)

Điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I(–1; 2) của (C) nên C(1; 5). Ta có: AD $\perp$ AB nên đường thẳng AD đi qua A, vuông góc với AB có phương trình: 5x + y +16 = 0

Gọi D(x; – 16 – 5x) $\in$AD và $d(D,AB)=\dfrac{|26x-78|}{\sqrt{26}}=2\sqrt{26} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$

Nên D_1(5; –41) hoặc D_2(1; –21).

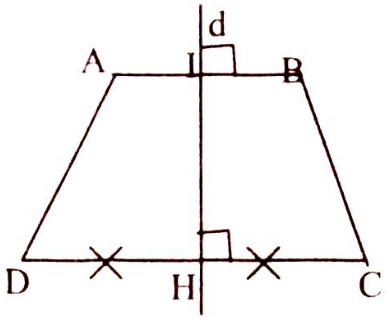
Tứ giác ABCD là hình thang vuông nên D, C cùng phía đối với đường thẳng AB.

Ta có: $d(D_1) = 208$, $d(D_2) = 104$ và $d(C) = -26$ nên $d(D_1)d(C) < 0$; $d(D_2)d(C) < 0$ nên không thỏa mãn.

Kết luận: A(2; 0), B(−3; −1), C(−4; 4), D(0; 10)

Bài 3. Cho ba điểm A(10; 5), B(15; 5), D(−20; 0) là ba đỉnh của hình thang cân ABCD. Tìm tọa độ đỉnh C, biết AB // CD

Giải



Tứ giác ABCD là hình thang cân với AB // CD và gọi d là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đáy thì d là trục đối xứng của hình thang ABCD nên C đối xứng với D qua d

Gọi I là trung điểm của AB thì $I\left(\frac{25}{2};5\right)$, phương trình đường thẳng d:

$2x - 25 = 0$

Đường thẳng DC đi qua D, vuông góc với d có phương trình: y = 0

$H = d \cap DC$ có tọa độ $H\left(\frac{25}{2};0\right)$ nên điểm C(45; 0).

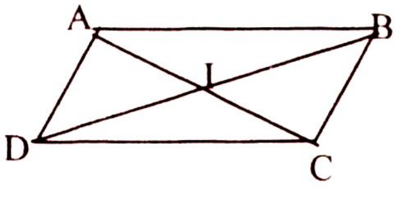
Bài 4. Cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh A(−3; −1), B(2;2), giao điểm hai đường chéo thuộc đường thẳng x − 6y − 3 = 0, diện tích bằng 26. Tìm tọa độ các đỉnh C, D.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (5;3)$ và phương trình đường thẳng AB:

$3x - 5y + 4 = 0$

CD // AB nên C, D thuộc đường thẳng d: $3x - 5y + c = 0$



$dt(ABCD) = AB.h = \sqrt{34}.h = 26 \Rightarrow h = \frac{26}{\sqrt{34}}$ và

$$d(A,d) = \frac{|c-4|}{\sqrt{34}} = h = \frac{26}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 30 \\ c = -22 \end{array}\right.$$

* **Trường hợp 1.** Khi d: $3x - 5y + 30 = 0$

Gọi $C\left(x_1;\frac{3x_1+30}{5}\right), D\left(x_2;\frac{3x_2+30}{5}\right) \in d$ và I là giao điểm của hai đường chéo AC với BD.

Ta có: $I\left(\dfrac{-3+x_1}{2};\dfrac{3x_1+25}{10}\right)\in\Delta$: x – 6y – 3 = 0

$\Rightarrow \dfrac{-3+x_1}{2}-\dfrac{6(3x_1+25)}{10}-3=0 \Leftrightarrow x_1=-15$ nên $C(-15;-3)$

Ta có: $I\left(\dfrac{2+x_2}{2};\dfrac{3x_2+40}{10}\right)\in\Delta$: x – 6y – 3 = 0

$\Rightarrow \dfrac{2+x_2}{2}-\dfrac{6(3x_2+40)}{10}-3=0 \Leftrightarrow x_2=-20$ nên $D(-20;-6)$

* **Trường hợp 2.** Khi d: 3x – 5y – 22 = 0

Gọi $C\left(x_1;\dfrac{3x_1-22}{5}\right), D\left(x_2;\dfrac{3x_2-22}{5}\right)\in$ d và I là giao điểm của hai đường chéo AC với BD.

Ta có: $I\left(\dfrac{-3+x_1}{2};\dfrac{3x_1-27}{10}\right)\in\Delta$: x – 6y – 3 = 0

$\Rightarrow \dfrac{-3+x_1}{2}-\dfrac{6(3x_1-27)}{10}-3=0 \Leftrightarrow x_1=9$ nên $C(9;1)$

Ta có: $I\left(\dfrac{2+x_2}{2};\dfrac{3x_2-12}{10}\right)\in\Delta$: x – 6y – 3 = 0

$\Rightarrow \dfrac{2+x_2}{2}-\dfrac{6(3x_2-12)}{10}-3=0 \Leftrightarrow x_2=4$ nên $D(4;-2)$

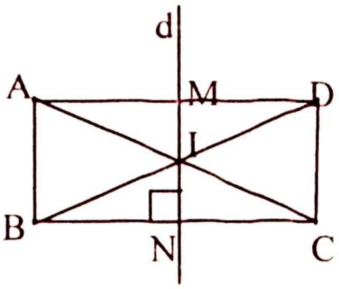
Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(1; –1) và phương trình đường thẳng AD: x + y + 2 = 0, AD = 2AB. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Giải

Phương trình đường thẳng d đi qua I, vuông góc với AD: x – y – 2 = 0

Gọi M = AD ∩ d, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+2=0\\x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$$



Gọi N đối xứng với M qua I thì N(2; 0) ∈BC và A(x; –x – 2) ∈AD

Khi đó: AD = 2AB ⇒ AM = MN

$$\Leftrightarrow 2x^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$$ nên A(–2; 0)

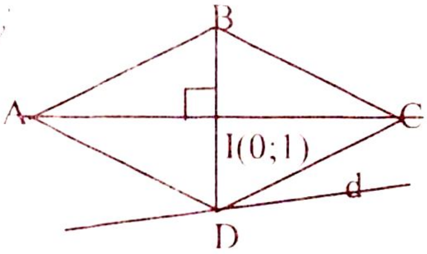
Điểm D đối xứng với A qua M nên D(2; –4). Điểm C đối xứng với A và B đối xứng với D qua I nên C(4; –2), B(0; 2).

Bài 6. Cho hình thoi ABCD có tâm $I(0;1)$ và phương trình đường thẳng AB: $x + 3y - 1 = 0$, đỉnh D thuộc đường thẳng: $x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi

Giải

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng tâm $I(x_0;y_0)$

Ta có: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases}$



Khi $I(0;1)$ thì biểu thức giải tích của phép đối xứng tâm I là:

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2 - y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$

Gọi D(I) là phép đối xứng tâm I. Khi đó: D(I): B $\mapsto$ D và AB $\mapsto$ DC. Suy ra phương trình đường thẳng DC: $x + 3y - 5 = 0$.

Mặt khác: $D \in d$: $x - 3y + 1 = 0$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ nên $D(2;1)$ và $B(-2;1)$

Đường thẳng AC đi qua I, vuông góc với BD có phương trình: $x = 0$

Suy ra: $A = AB \cap AC$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ nên $A\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ và $C\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$

Bài 7. Cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(-1;3)$ và hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng có phương trình: $x - 2y + 2 = 0$, các tọa độ đỉnh C đều dương. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D của hình vuông; tính chu vi và diện tích của hình vuông đó.

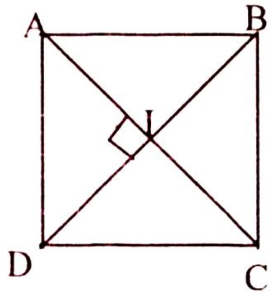
Giải

Đường thẳng d đi qua A, vuông góc với BC có phương trình:

$2x + y - 1 = 0$

$B = d \cap BC$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ nên B(0; 1) và $AB = \sqrt{5}$



Gọi $C(2y - 2; y) \in BC$,

$BC = \sqrt{(2y-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5y^2 - 10y + 5}$

Ta có: $BC = AB \Leftrightarrow \sqrt{5y^2 - 10y + 5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5y^2 - 10y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$.

Do đỉnh C có tọa độ dương nên C(2; 2).

Gọi D(x; y) và $\overrightarrow{CD} = (x-2; y-2), \overrightarrow{BA} = (-1; 2)$. Tứ giác ABCD là hình vuông nên: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ nên D(1; 4)

Chu vi hình vuông là $L = 4AB = 4\sqrt{5}$ (đvđd).

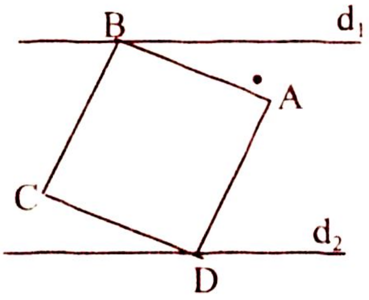
Diện tích hình vuông là $S = AB^2 = 5$ (đvdt)

Bài 8. Cho hai đường thẳng d_1: x + 2y – 1 = 0, d_2: x + 2y +8 = 0 và điểm A(1;2). Tìm tọa độ các điểm $B \in d_1$, $D \in d_2$ và C sao cho tứ giác ABCD là hình vuông.

Giải

Xét phép quay Q (A; 90^0), Q (A; – 90^0) có biểu thức giải tích là:

$\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$



* Phép quay Q (A; 90^0): $d_1 \mapsto a_1$,

phương trình đường thẳng a_1:

2x – y – 4 = 0

Q (A; 90^0): $B \in d_1 \mapsto D \in a_1$

và $D \in d_2$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x + 2y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow$ D(0; –4)

Q (A; – 90^0) : D $\mapsto$ B thì B(–5; 3)$\in d_1$

Phương trình đường thẳng BD: 7x + 5y + 20 = 0 và phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với BD là: 5x – 7y + 9 = 0.

Gọi I = BD $\cap$ d, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + 5y + 20 = 0 \\ 5x - 7y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Điểm C đối xứng với A qua BD nên I là trung điểm của AC.

Suy ra: C(–6; –3)

* Phép quay Q (A; – 90^0) : $d_1 \mapsto a_2$,

phương trình đường thẳng a_2: 2x – y + 4 = 0

Q (A: -90^0): B $\in d_1 \mapsto$ D $\in a_2$ và D $\in d_2$ nên tọa độ của D là nghiệm

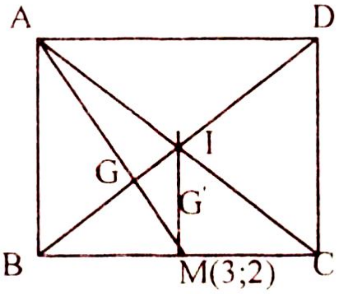
của hệ: $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + 2y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{16}{5} \\ y = -\dfrac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{16}{5}; -\dfrac{12}{5}\right)$

Q (A: 90^0): D $\mapsto$ B thì B thì $B\left(\dfrac{27}{5}; -\dfrac{11}{5}\right) \in d_1$

Điểm C đối xứng với điểm A qua đường thẳng BD nên $C\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{33}{5}\right)$

Bài 9. Cho hình vuông ABCD có tâm I, biết A(−2;2) và trọng tâm tam giác ABC và IBC lần lượt $G\left(\dfrac{4}{3}; 2\right), G'\left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD

Giải



Gọi M là trung điểm của BC thì:

$\overrightarrow{GM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow M(3; 2)$

Ta có:

G' là trọng tâm ΔIBC nên $\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{G'M} \Rightarrow I(1; 1)$

C đối xứng với A qua I nên C(4; 0)

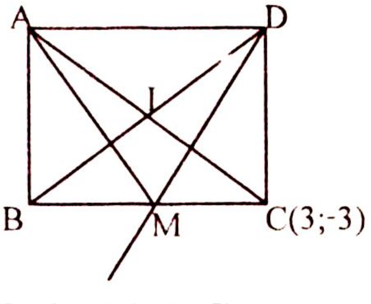
Đường thẳng CD đi qua C, song song với IM có phương trình:

2x − y − 14 = 0

Bài 10. Cho hình vuông ABCD có M là trung điểm cạnh BC, phương trình đường thẳng DM: x − y − 2 = 0 và C(3;−3). Đỉnh A thuộc đường thẳng d: 3x + y − 2 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D.

Giải

Ta có: $dt(\Delta ADM) = 2dt(\Delta DCM) \Rightarrow d(A, DM) = 2d(C, DM)$



Gọi A(x; 2 − 3x)$\in$ d thì:

$d(A, DM) = \dfrac{4|x-1|}{\sqrt{2}} = 2d(C, DM) = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |x-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$ nên A(3; −7) hoặc A(−1; 5)

Do A nằm khác phía với C đối với đường thẳng DM nên A(−1; 5)

Gọi I là trung điểm của AC thì I(1; 1) và phương trình đường thẳng DB: $x - 2y + 1 = 0$

$D = DM \cap BD \Rightarrow D(5; 3)$ và B đối xứng với D qua I nên $B(-3; -1)$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho ba điểm $A(-1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(4; 2)$ và đường thẳng d: $3x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho tứ giác ABCD là hình thang.

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AD = AB, DC = 2AB và $\widehat{BAD} = 90^0$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh DB và trọng tâm của tam giác ABD là $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang.

Bài 3. Cho hình thang cân ABCD (AB// CD), cạnh AB, AD lần lượt có phương trình: $x + y - 4 = 0$; $x + 2y - 8 = 0$. Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua điểm $M(5; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân ABCD, biết đỉnh C thuộc đường thẳng d: $x - y = 0$.

Bài 4. Cho hình bình hành có toạ độ một đỉnh là $(4;-1)$, phương trình hai cạnh: $x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$. Tìm toạ độ ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD có diện tích S = 4, biết $A(1;0)$, $B(2;0)$. Giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng Δ: $y = x$. Tìm toạ độ các đỉnh C và D

Bài 6. Cho ba đường thẳng d_1: $x - y + 1 = 0$; d_2: $x - y = 0$; d_3: $x - y - 1 = 0$ và điểm $M(0; 1) \in d_1$. Tìm tọa độ các điểm $N \in d_2$, $Q \in d_3$ và P sao cho diện tích hình chữ nhật MNPQ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 7. (Khối B – 2002) Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Phương trình đường thẳng AB là: $x - 2y + 2 = 0$ và AB = 2AD. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D. Biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Bài 8. Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng chứa hai cạnh lần lượt là: $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ và đỉnh $A(2; -3)$. Tính diện tích của hình chữ nhật đó.

Bài 9. Cho hình thoi ABCD có tâm I(1; 1) và phương trình đường thẳng AB: $2x - y + 1 = 0$, đỉnh D thuộc đường thẳng: $x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Bài 10. Cho hình thoi ABCD có $A(1; 3)$, $B(4; -1)$ và AD song song với trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh C, D biết đỉnh D có hoành độ âm.

Bài 11. Viết phương trình các cạnh của hình vuông ABCD, biết $A(-4; 5)$ và một đường chéo có phương trình: $7x - y + 8 = 0$.

Bài 12. Cho tam giác ABC, A(0; 0), B(2; 4), C(6; 0) và các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh AB, BC; P, Q thuộc cạnh AC sao cho tứ giác MNPQ là hình vuông. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông đó.

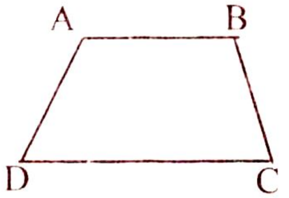
Bài 13. Cho hình vuông ABCD có bốn đỉnh nằm trên hai đường thẳng d_1: $3x - 4y + 6 = 0$ và d_2: $6x - 8y - 13 = 0$. Tính diện tích hình vuông đó

Bài 14. (A – 2005) Cho hai đường thẳng d_1: $x - y = 0$ và d_2: $2x + y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành

Bài 15. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của hai đường thẳng d_1: $x - y - 3 = 0$, d_2: $x + y - 6 = 0$. Trung điểm cạnh AB là giao của d_1 với Ox. Tìm tọa độ các đỉnh A, B,C, D

Hướng dẫn giải

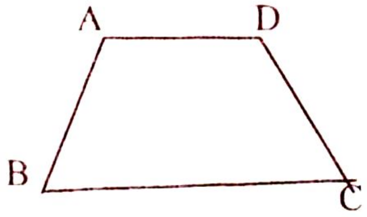
Bài 1.



* Hình thang ABCD có AB // DC

Đường thẳng DC đi qua C, song song với AB có phương trình:

$x - y - 2 = 0$ và D = d ∩ DC nên D(0; –2)

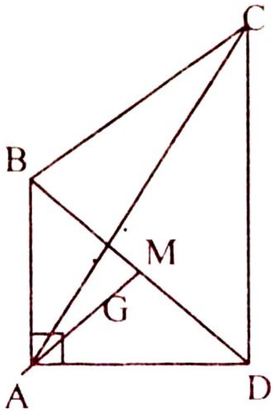


* Hình thang ABCD có AD // BC

Đường thẳng AD đi qua A, song song với BC có phương trình:

$x + 2y + 1 = 0$ và D = d ∩ AD nên $D\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$

Bài 2. Ta có: $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow A(0;2)$



Tam giác BAD vuông cân tại A nên BD ⊥ AM, phương trình đường thẳng BD: $x - 3y - 4 = 0$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔBAD: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

Tọa độ của B, D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=10\\x-3y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=10\\x=3y+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0;x=4\\y=-2;x=-2\end{array}\right.$$ nên B(4; 0), D(–2; –2) hoặc B(–2; –2), D(4; 0)

Ta có: AB // CD và DC = 2AB nên $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra: D(6;–6) hoặc D(0; –8)

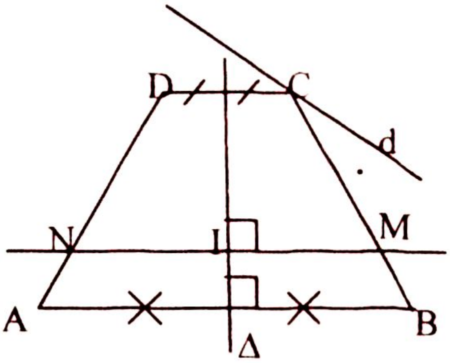
Bài 3. Đường thẳng AB: $x + y - 4 = 0$ và AD: $x + 2y - 8 = 0$

Nên $A = AD \cap AB \Rightarrow A(0; 4)$

Đường thẳng a đi qua M, song song với AB có phương trình: $x + y - 7 = 0$

Gọi $N = AD \cap a$

$\Rightarrow N(6; 1)$ và trung điểm MN là $I\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$



Đường thẳng Δ đi qua I, vuông góc với AB có phương trình: $x - y - 4 = 0$

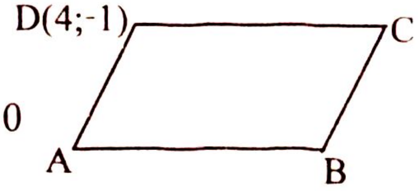
Điểm B đối xứng với A qua đường thẳng Δ nên $B(8; -4)$

Phương trình đường thẳng BC: $2x + y - 12 = 0$ và $C = BC \cap d \Rightarrow C(4; 4)$

Điểm D đối xứng với C qua đường thẳng Δ nên $D(8; 0)$

Bài 4. Đặt AB: $x - 3y = 0$ và BC: $2x + 5y + 6 = 0$ và $D(4; -1)$

$B = AB \cap BC \Rightarrow B\left(-\frac{18}{11};-\frac{6}{11}\right)$



DC // AB nên DC có phương trình: $x - 3y - 7 = 0$

$\Rightarrow C = DC \cap BC \Rightarrow C\left(\frac{17}{11};-\frac{20}{11}\right)$

AD // BC nên AD có phương trình: $2x + 5y - 3 = 0$ và $A = AD \cap AB$

$\Rightarrow A\left(\frac{9}{11};\frac{3}{11}\right)$

Bài 5. Ta có ABCD là hình bình hành nên DC // AB, $AB = 1$, $S = h.AB = 4$

$\Rightarrow h = 4$

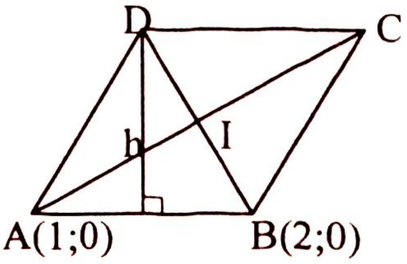
Suy ra: D, C thuộc đường thẳng Δ song song với AB và cách AB một khoảng bằng 4

Phương trình Δ: $y = 4$ hoặc $y = -4$

– Khi Δ có phương trình $y = 4$. Gọi $C(x_C;4)$, $D(x_D;4)$

Trung điểm I của AC thuộc đường thẳng $y = x$

$\Rightarrow \frac{x_C + 1}{2} = 2 \Rightarrow x_C = 3$



Trung điểm I của BD thuộc đường thẳng $y = x$.

Suy ra: $\frac{x_D + 2}{2} = 2 \Rightarrow x_D = 2$

Vậy: $C(3;4)$ và $D(2;4)$

– Khi Δ có phương trình $y = -4$. Gọi $C(x_C;-4)$ và $D(x_D;-4)$

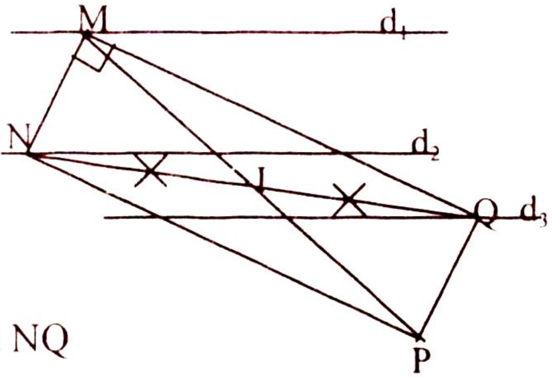
Trung điểm I của AC thuộc đường thẳng $y = x$.

Suy ra: $\dfrac{x_C + 1}{2} = -2 \Rightarrow x_C = -5$

Trung điểm I của BD thuộc đường thẳng $y = x$.

Suy ra: $\dfrac{x_D + 2}{2} = -2 \Rightarrow x_D = -6$

Vậy: C(−5;−4) và D(−6;−4)



Bài 6. Gọi $N(a; a) \in d_2$ và $Q(b + 1; b) \in d_3$

$\overrightarrow{MN} = (a; a-1)$, $\overrightarrow{MQ} = (b+1; b-1)$

Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật

⇒ ΔMNQ vuông tại M và

P đối xứng với M qua trung điểm I của NQ

$dt(MNPQ) = MN.MQ = 2\left(\dfrac{1}{2}MN.MQ\right) = 2dt(\Delta MNQ)$ nên $dt(MNPQ)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow dt(\Delta MNQ)$ nhỏ nhất. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MQ} \\ dt(\Delta MNQ) = \dfrac{MN.MQ}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ} = 0 \\ dt(\Delta MNQ) = \dfrac{MN.MQ}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - b + 1 = 0 \\ dt(\Delta MNQ) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left[(2a-1)^2 + 1\right](b^2 + 1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)b + 1 = 0 \\ dt(\Delta MNQ) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left[(2a-1)^2 + 1\right](b^2 + 1)} \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = b \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{x} \\ dt(\Delta MNQ) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + x^2 + \dfrac{1}{x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x} \\ dt(\Delta MNQ) \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \min dt(\Delta MNQ) = 1$ khi

$$x^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = -1 \\ x = -1; y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2a - 1 = 1; b = -1 \\ 2a - 1 = -1; b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1; b = -1 \\ a = 0; b = 1 \end{array}\right.$$

* Khi a = 1; b = − 1 thì N(1; 1); Q(0; −1) và $I\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$ nên P(1; −1)

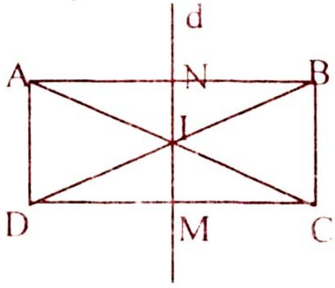
* Khi a = 0; b = 1 thì N(0; 0); Q(2; 1) và $I\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ nên P(2; 0)

Bài 7. Đường thẳng d đi qua I, vuông góc với AB là: $2x + y - 1 = 0$

Gọi $N = AB \cap d$ thì $N(0; 1)$ và M đối xứng với N qua I nên $M(1; -1)$

Gọi $A(2b - 2; b) \in AB$ và $\overrightarrow{NA} = (2b-2; b-1)$, $\overrightarrow{MN} = (-1; 2)$

Ta có: $AN \perp MN$ và $AB = 2AD$ nên $AN = MN$.



Suy ra: $(b-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(2; 2) \\ A(-2; 0) \end{array}\right.$

Do điểm A có hoành độ âm nên $A(-2; 0)$;

B đối xứng với A qua N nên $B(2; 2)$

C đối xứng với A qua I nên $C(3; 0)$ và D đối xứng với C qua M nên $D(-1; -2)$

Bài 8. Đặt DC: $2x - 3y + 5 = 0$ và BC: $3x + 2y - 7 = 0$

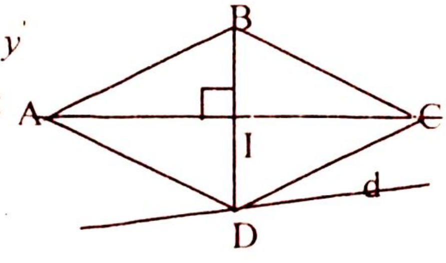
Khi đó:

$$AD = d(A, DC) = \frac{18}{\sqrt{13}} \text{ và } AB = d(A, BC) = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$dt(ABCD) = AB.AD = \frac{18}{\sqrt{13}} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{126}{13} \text{ (đ vdt)}$$

Bài 9. Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm $M(x; y)$ qua phép đối xứng tâm $I(x_0; y_0)$

Ta có: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases}$



Biểu thức giải tích của phép đối xứng tâm I là:

$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$

Gọi D(I) là phép đối xứng tâm I. Khi đó: D(I): B $\mapsto$ D và AB $\mapsto$ DC. Suy ra phương trình đường thẳng DC: $2x - y - 3 = 0$.

Mặt khác: $D \in d$: $x - y + 1 = 0$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ nên $D(4; 5)$ và $B(-2; -3)$

Đường thẳng AC đi qua I, vuông góc với BD có phương trình:

$3x + 4y - 7 = 0$

Suy ra: $A = AB \cap AC$, tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{11} \\ y = \dfrac{17}{11} \end{cases} \text{ nên } A\left(\frac{3}{11}; \frac{17}{11}\right) \text{ và } C\left(\frac{19}{11}; \frac{5}{11}\right)$$

Bài 10. Ta có: AD // Ox nên phương trình đường thẳng AD: $y - 3 = 0$

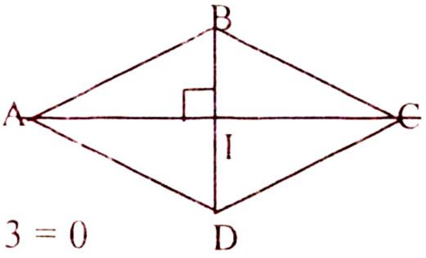
BC // AD ⇒ BC // Ox nên phương trình đường thẳng BC: $y + 1 = 0$

Gọi $D(d; 3) \in AD$ và $C(c; -1) \in BC$

Tứ giác ABCD là hình thoi nên AB = BC = AD

Suy ra: $\begin{cases} BC = AB \\ AD = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c-4)^2 = 25 \\ (d-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-4 = \pm 5 \\ d-1 = \pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9; c = -1 \\ d = 6; d = -4 \end{cases}$

Do điểm D có hoành độ âm nên C(9; −1) hoặc C(−1; −1) và D(−4; 3)



Ta có tứ giác ABCD là hình thoi nên C, D nằm cùng phía đối với đường thẳng AB

Phương trình đường thẳng AB là d: $4x + 3y - 13 = 0$

* Xét hai điểm C(9; −1), D(−4; 3), ta có: $d(C) = 4.9 + 3.(-1) - 13 = 20$ và $d(D) = -20$ nên D, C nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Do đó tọa độ các điểm cần tìm C(−1; −1) và D(−4; 3)

Bài 11. Ta có: Điểm A không thuộc đường thẳng $7x - y + 8 = 0$ nên đặt BD: $7x - y + 8 = 0$ thì C đối xứng với A qua BD nên

$$S_{BD} : A(-4;5) \mapsto C(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x = -4 - \dfrac{14(-28-5+8)}{50} = 3 \\ y = 5 + \dfrac{2(-28-5+8)}{50} = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3;4)$$

Gọi $B(x; 7x + 8) \in BD$ và $\overrightarrow{AB} = (x+4; 7x+3); \overrightarrow{CB} = (x-3; 7x+4)$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CB \\ AB = CB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0 \\ AB^2 = CB^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$ nên B(0; 8), D(−1; 1) hoặc D(0; 8), B(−1; 1)

Bài 12. Phương trình đường thẳng AB: $2x - y = 0$ và BC: $x + y - 6 = 0$

Gọi $M\left(\dfrac{y}{2}; y\right) \in AB \Rightarrow N(6-y; y)$ và $P(a;0); Q(b;0) \in Ox$ với $a > b > 0$

$$\overrightarrow{MN} = \left(6 - \frac{3y}{2}; 0\right); \overrightarrow{NP} = (a + y - 6; -y); \overrightarrow{QP} = (a - b; 0)$$

Ta có tứ giác MNPQ là hình vuông nên

$$\begin{cases} MN // QP; MN = QP \\ MN \perp NP; MN = NP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} = 0 \\ MN = NP \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6-\dfrac{3y}{2}=a-b\\ \left(6-\dfrac{3y}{2}\right)(a+y-6)=0\\ \left(6-\dfrac{3y}{2}\right)^2=(a+y-6)^2+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+y-6=0\\ \left(6-\dfrac{3y}{2}\right)^2=y^2\\ 6-\dfrac{3y}{2}=a-b\end{cases}$$

Suy ra: $y=\frac{12}{5};a=\frac{18}{5};b=\frac{6}{5}$ nên $M\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right);N\left(\frac{18}{5};\frac{12}{5}\right);Q\left(\frac{6}{5};0\right);P\left(\frac{18}{5};0\right)$

Bài 13. Ta có: d_1 // d_2 M(-2;0) ∈ d_1 nên cạnh của hình ABCD có bốn đỉnh nằm trên hai đường thẳng d_1, d_2 có độ dài:

$a=d(d_1,d_2)=d(M,d_2)$ nên $dt(ABCD)=\frac{25}{4}$

Bài 14. Ta có: A, C đối xứng nhau qua trục hoành

Gọi A(x; x) ∈d_1 thì C(x; –x)∈d_2 nên: x = 1

Suy ra: A(1; 1), C(1; –1). Gọi B(x; 0) ∈Ox thì

$\overrightarrow{AB}=(x-1;-1);\overrightarrow{CB}=(x-1;1)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}\\ AB=CB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0\\ AB^2=CB^2\end{cases}\Leftrightarrow(x-1)^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\end{array}\right.$

nên B(2; 0), D(0; 0) hoặc D(2; 0), B(0; 0)

Bài 15. Ta có: $I=d_1\cap d_2\Rightarrow I=\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$, gọi M là trung điểm AB thì

$M=d_1\cap \text{Ox}\Rightarrow M=(3;0)$

Ta có: $\overrightarrow{IM}=\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow IM=\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ và phương trình đường thẳng AB: x + y – 3 = 0

$dt(\Delta IAB)=\frac{1}{4}dt(ABCD)=3\Rightarrow\frac{1}{2}IM.AB=3\Rightarrow AB=2\sqrt{2}$

Gọi A(x; 3 – x) thì B(6– x; x – 3) và

$\overrightarrow{AB}=(6-2x;2x-6)\Rightarrow AB^2=2(2x-6)^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2\end{array}\right.$

* Khi A(4; –1), B(2; 1) thì C(5; 4) và D(7; 2)

* Khi A(2; 1), B(4; –1) thì C(7; 2) và D(5; 4)

§4. ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình đường tròn

– Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

– Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$ là đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

2. Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và đường tròn

*** Vị trí tương đối của điểm và đường tròn**: Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$ có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

– Phương tích của điểm M đối với đường tròn (C):

$\mathbb{P}(M/C)=x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c$

+ $\mathbb{P}(M/C)<0 \Leftrightarrow M$ nằm trong đường tròn (C)

+ $\mathbb{P}(M/C)=0 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C)

+ $\mathbb{P}(M/C)>0 \Leftrightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (C)

– Cho hai đường tròn (C) và (C_1) không cùng tâm:

(C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$

(C_1): $x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$, với $a_1^2+b_1^2-c_1>0$

Trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C_1) là:

$$2(a-a_1)x+2(b-b_1)y+c_1-c=0$$

**** Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn***

Xét đường tròn (C) và đường thẳng d: $Ax+By+C=0; A^2+B^2>0$ và $h=d(I,d)=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

+ $h>R \Leftrightarrow d\cap(C)=\varnothing$

+ $h=R \Leftrightarrow d$ tiếp xúc với (C)

+ $h<R \Leftrightarrow d$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt

**** Vị trí tương đối của hai đường tròn***

Xét hai đường tròn (C) và (C_1) lần lượt có tâm I, I_1 và bán kính R, R_1.

+ $II_1 > R + R_1 \Leftrightarrow (C) \cap (C_1) = \varnothing$: Không cắt nhau ngoài

+ $II_1 < |R - R_1| \Leftrightarrow (C) \cap (C_1) = \varnothing$: Không cắt nhau trong

+ $II_1 = R + R_1 \Leftrightarrow (C) \cap (C_1) = \{A\}$: Tiếp xúc ngoài tại A

+ $II_1 = |R - R_1| \Leftrightarrow (C) \cap (C_1) = \{A\}$: Tiếp xúc trong tại A

+ $|R - R_1| < II_1 < R + R_1 \Leftrightarrow (C) \cap (C_1) = \{A; B\}$: Cắt tại hai điểm phân biệt A, B

2. Tiếp tuyến của đường tròn

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ tại $M(x_0; y_0) \in (C)$: $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = R^2$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình đường tròn

Phương pháp:

1. Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$, bán kính R

Phương trình đường tròn: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

2. Khi đường tròn (C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C:

– Tìm tâm I: IA = IB = IC và bán kính R = IA

– Hoặc gọi phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$ và từ A, B, C thuộc (C) ta tìm a, b, c.

Bài tập mẫu

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và có tâm thuộc đường thẳng d: $2x - y - 4 = 0$.

Giải

Gọi $I(a; 2a-4) \in d$ là tâm của đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ

Khi đó: $d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow |2a-4| = |a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-4=a \\ 2a-4=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Phương trình đường tròn (C):

$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ hoặc $\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$

Bài 2. Cho hai điểm A(2;0), B(6;4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A nên $a = 2$ và bán kính $R = d(I,Ox) = |b|$.

Ta có:

$$IB = \sqrt{(6-a)^2 + (4-b)^2} = \sqrt{16 + (4-b)^2} = 5 \Leftrightarrow b^2 - 8b + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 7 \end{array}\right.$$

Phương trình đường tròn (C):

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$

Bài 3. Cho tam giác ABC biết A(0;2), B(–2; –2), C(4;–s2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B và M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm H, M, N

Giải

Phương trình đường cao BH: $x - y = 0$ và phương trình đường thẳng AC: $x + y - 2 = 0$

$H = BH \cap AC \Rightarrow H(1; 1)$. M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC nên M(–1; 0), N(1; –2).

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$

Ta có: H, M, N thuộc (C) nên: $\begin{cases} 2a + 2b - c = 2 \\ 2a \quad\quad + c = -1 \\ -2a + 4b + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

Bài 4. Cho đường thẳng d: x – 7y + 10 = 0. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ: 2x + y = 0 và tiếp xúc với đường thẳng d tại A(4; 2)

Giải

Gọi $I(a;-2a) \in \Delta$ là tâm của đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d tại A nên bán kính

$$R = d(I,d) = IA \Leftrightarrow \frac{|a + 14a + 10|}{\sqrt{50}} = \sqrt{(a-4)^2 + (2a+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow |3a + 2| = \sqrt{10a^2 + 40} \Leftrightarrow (a-6)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 6$$

Phương trình đường tròn (C): $(x-6)^2 + (y+12)^2 = 40$

Bài 5. Cho đường thẳng d: $x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ và điểm A(–1; 1). Viết phương trình đường tròn đi qua A, gốc tọa độ và tiếp xúc với đường thẳng d

Giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d nên

$$R = d(I,d) = \frac{\left|a - b + 1 - \sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}$$

Phương trình đường tròn (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{\left(a-b+1-\sqrt{2}\right)^2}{2}$

Ta có: A, O thuộc đường tròn (C) nên:

$$\begin{cases} (-1-a)^2 + (1-b)^2 = \dfrac{\left(a-b+1-\sqrt{2}\right)^2}{2} \\ a^2 + b^2 = \dfrac{\left(a-b+1-\sqrt{2}\right)^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = b \\ 2a^2 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; b = 1 \\ a = -1; b = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc: $(x+1)^2 + y^2 = 1$

Bài 6. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$ cắt tia Oy tại A. Viết phương trình đường tròn (C') có bán kính bằng 2 và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) tại A.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I\left(-2\sqrt{3};0\right)$, bán kính R = 4 cắt tia Oy tại A nên A(0; 2).

Đường tròn (C') có tâm $I_1(a;b)$, bán kính $R_1 = 2$ và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) tại A nên:

$$\overline{AI} = 2\overline{I_1A} \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} = -2a \\ -2 = 2(2-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 3 \end{cases}.$$

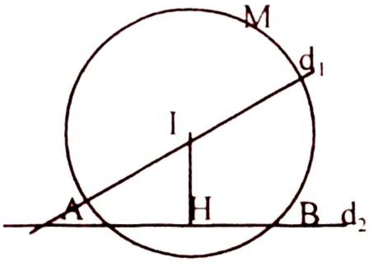
Phương trình đường tròn (C'): $\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y-3)^2 = 4$

Bài 7. Cho hai đường thẳng: d_1: $2x + y - 4 = 0$ và d_2: $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm M(1; –1), có tâm thuộc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{7}$

Giải

Gọi H là trung điểm AB và I(a; −2a + 4) $\in d_1$ là tâm của đường tròn (C) thì $AH = BH = \frac{AB}{2} = \sqrt{7}$

và $IH \perp AB$, $IH = d(I, d_2) = \frac{|3a - 5|}{\sqrt{2}}$



Ta có: bán kính đường tròn (C):

$R = IM = \sqrt{5a^2 - 22a + 26}$

Xét tam giác vuông IHB: $IB^2 = IH^2 + HB^2 \Leftrightarrow R^2 = IH^2 + HB^2$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 22a + 26 = \frac{(3a-5)^2}{2} + 7 \Leftrightarrow a^2 - 14a + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 13 \end{array}\right.$$

Phương trình đường tròn (C):

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ hoặc: $(x-13)^2 + (y+22)^2 = 585$

Bài 8. Cho đường thẳng d: x − 7y + 10 = 0 và điểm A(1; −2). Viết phương trình đường tròn đi qua A và các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

Giải

Gọi M, N là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

Có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 7y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 10 = 0 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1; x = -3 \\ y = 2; x = 4 \end{array}\right.$$

Phương trình đường tròn (C’) đi qua ba điểm A, M, N:

$x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$

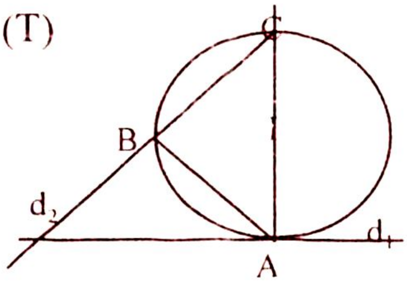
Cách khác (*Chùm đường tròn*)

Đường tròn (C’) đi qua giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C) nên phương trình có dạng: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 + m(x - 7y + 10) = 0$. Ta có: A $\in$(C’) nên $-25 + 25m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Phương trình đường tròn (C’): $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$

Bài 9. (Khối A–2010) Cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình đường tròn (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Giải



Ta có: ΔABC vuông tại B và nội tiếp đường tròn (T)

Đường tròn (T) tiếp xúc với d_1 tại A

$\Rightarrow AC \perp d_1$ tại A

Gọi $A\left(a;-a\sqrt{3}\right) \in d_1$ với $a > 0$ và $C\left(c;c\sqrt{3}\right) \in d_2$

$\overrightarrow{AC} = \left(c-a;(c+a)\sqrt{3}\right) \perp \overrightarrow{d_1} = \left(-1;\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC}\overrightarrow{d_1} = 0$

$\Leftrightarrow -c+a+3(c+a) = 0 \Leftrightarrow c = -2a$ nên $C\left(-2a;-2a\sqrt{3}\right) \in d_2$

Gọi $B\left(b;b\sqrt{3}\right) \in d_2$ và $\overrightarrow{BA} = \left(a-b;-(a+b)\sqrt{3}\right)$, ΔABC vuông tại B nên $AB \perp d_2$

Suy ra: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{d_2} = \left(1;\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{d_2} = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{a}{2}$ nên $B\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{BA} = \left(\frac{3a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$ và $BC = 3a$ nên

$dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $a > 0$).

Ta có: $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$, $C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right)$.

Gọi I là tâm đường tròn (T) thì I là trung điểm AC và $I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R = IA = 1$

Phương trình đường tròn (T): $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 1$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho hai điểm A(0;5), B(2;3). Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính bằng $\sqrt{10}$

Bài 2. Cho điểm A(3; 3) và đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A, cắt đường thẳng d tại hai điểm B, C sao cho AB vuông góc với AC và AB = AC.

Bài 3. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Gọi (C') là đường tròn có tâm M(5; 1), cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho AB= $\sqrt{3}$. Viết phương trình đường tròn (C').

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-12x-4y+36=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C)

Bài 5. Cho tam giác ABC biết A(3;0), đường cao từ đỉnh B: $x + y + 1 = 0$, trung tuyến từ đỉnh C: $2x - y - 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 6. Cho hai đường tròn: (C_1): $x^2+y^2-10x=0$, $(C_2): x^2+y^2+4x-2y-20=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua giao điểm của (C_1), (C_2) và có tâm thuộc đường thẳng d: $x + 6y - 6 = 0$

Bài 7. Cho đường tròn: (C_1): $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và đường thẳng d: $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đối xứng với đường tròn (C_1) qua đường thẳng d.

Bài 8. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng d: $x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C), có tâm thuộc đường thẳng d và có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C).

Bài 9. Cho hai đường thẳng: d_1: $x + y + 2 = 0$ và d_2: $3x - 4y = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm M(4; 1),có tâm thuộc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$

Bài 10. Cho đường thẳng: d: $2x + y - 5 = 0$ và điểm M(−3; 1).Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm K(−1; 3), cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho MA, MB là hai tiếp tuyến của (C) và $\widehat{AMB} = 90^0$

Hướng dẫn giải

Bài 1. Phương trình đường trung trực d của đoạn thẳng AB:$x - y + 3 = 0$

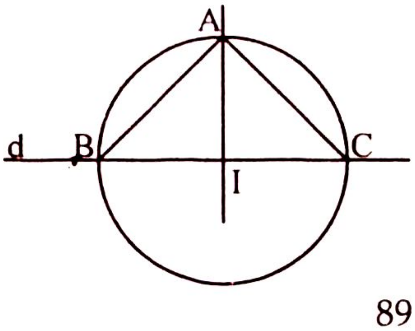
Gọi I(a; a + 3) ∈d là tâm của đường tròn thì bán kính:

$$R = IA = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$$

Ta có: $R = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(a-2)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$.

Phương trình đường tròn (C): $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ hoặc $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$

Bài 2. Đường tròn (C) đi qua điểm A, cắt đường thẳng d tại hai điểm B, C sao cho AB vuông góc với AC và AB = AC nên ΔABC vuông cân tại A và nội tiếp đường tròn (C) nên tâm I của (C) là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d.



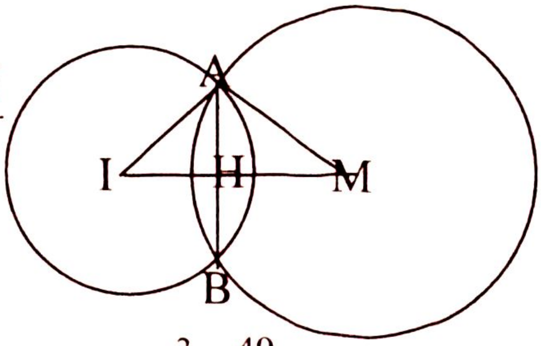
Phương trình đường thẳng AI: $x - y = 0$ và $I = AI \cap d \Rightarrow I(1;\ 1)$

Bán kính: $R = AI = 2\sqrt{2}$

Phương trình đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$

Bài 3. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: $I(1;\ -2)$, $R = \sqrt{3}$

Ta có: $AB = \sqrt{3}$ nên ΔIAB đều.



Ta có: $IM \perp AB$ tại H và $HB = HA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

IH là đường cao tam giác đều IAB

có cạnh $\sqrt{3}$ nên $IH = \dfrac{3}{2}$

$HM = IM - IH = 5 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$ và $AM^2 = AH^2 + HM^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{49}{4} = 13$

Phương trình đường tròn (C'): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$

Bài 4. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: $I(6;\ 2)$, $R = 2$. Gọi $I_1(a;b)$ là tâm của đường tròn (C') nên bán kính:

$R_1 = d(I_1, Ox) = d(I_1, Oy) \Rightarrow R_1 = |b| = |a|$

Ta có:

$II_1 = \sqrt{(a-6)^2 + (b-2)^2} = R + R_1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 - 12a - 4b + 40} = 2 + |a|$

$\Leftrightarrow b^2 - 12a - 4b - 4|a| + 36 = 0$

Trường hợp 1: Khi $a = b$, ta có:

$$b^2 - 16b - 4|b| + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b^2 - 20b + 36 = 0 & \text{khi } b \geq 0 \\ b^2 - 12b + 36 = 0 & \text{khi } b < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 18 \\ b = 2 \end{array}\right.$$

Phương trình đường tròn (C'):

$(x-18)^2 + (y-18)^2 = 324$ hoặc $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

Trường hợp 2: Khi $a = -b$, ta có:

$$b^2 + 8b - 4|b| + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b^2 + 4b + 36 = 0 & \text{khi } b \geq 0 \\ b^2 + 12b + 36 = 0 & \text{khi } b < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow b = -6$$

Phương trình đường tròn (C'): $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$

Bài 5. Tọa độ các điểm $B(-1;\ 0)$, $C(-1;\ -4)$, $A(3;0)$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

Bài 6. Hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và đường thẳng đi qua A, B là trục đẳng phương của hai đường tròn đó nên AB:

$7x - y - 10 = 0$

Phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 10x + m(7x - y - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x(7m - 10) - my - 10m = 0$ với $\left(\frac{7m-10}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 10m > 0$ (*)

Có tâm $I\left(-\frac{7m-10}{2}; \frac{m}{2}\right)$ thuộc đường thẳng d: x + 6y − 6 = 0 nên

$$-\frac{7m-10}{2} + \frac{6m}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

thỏa mãn (*) nên phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 24x + 2y + 20 = 0$

Bài 7. Tâm và bán kính của đường tròn(C_1) là: $I_1(1;\ 2)$, $R_1 = 2$

Phép đối xứng qua đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$

$$S_d: M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x - \frac{2(x-y-1)}{2} = y + 1 \\ y' = y + \frac{2(x-y-1)}{2} = x - 1 \end{cases}$$

Ta có: $S_d: (C_1) \mapsto (C) \Rightarrow S_d: I_1(1;2) \mapsto I(a;b) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 + 1 = 3 \\ b = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

Phương trình đường tròn (C): $(x-3)^2 + y^2 = 4$

Bài 8. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: I(1; 1), R = 1. Gọi $I_1(a; a+3) \in d$ là tâm của đường tròn (C') có bán kính: $R_1 = 2R = 2$

Ta có: $II_1 = \sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2} = R + R_1 = 3 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$

Phương trình đường tròn (C'):

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ hoặc $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

Bài 9. Gọi H là trung điểm AB và I(a; −a −2) $\in d_1$ là tâm của đường tròn (C)

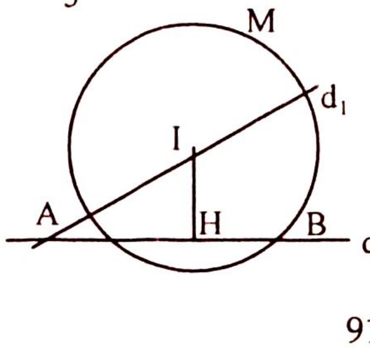
thì $AH = BH = \frac{AB}{2} = 4$ và $IH \perp AB$, $IH = d(I, d_2) = \frac{|7a+8|}{5}$

Ta có: bán kính đường tròn (C):

$R = IM = \sqrt{2a^2 - 2a + 25}$

Xét tam giác vuông IHB:

$IB^2 = IH^2 + HB^2 \Leftrightarrow R^2 = IH^2 + HB^2$



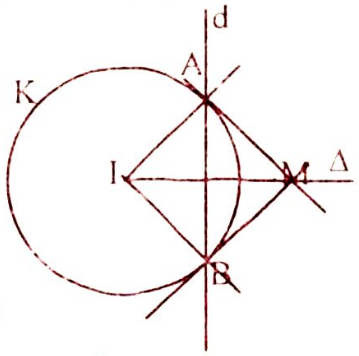
$$\Leftrightarrow 2a^2-2a+25=\frac{(7a+8)^2}{25}+16 \Leftrightarrow a^2-162a+161=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=161 \end{array}\right.$$

Phương trình đường tròn (C):

$(x-1)^2+(y+3)^2=25$ hoặc: $(x-161)^2+(y+163)^2=51545$

Bài 10. Đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với d có phương trình là: $x-2y+5=0$.

Gọi I là tâm của đường tròn (C) đi qua điểm K, cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho MA, MB là hai tiếp tuyến của (C).



Khi đó: $I \in \Delta$ nên $I(2b-5; b)$

và $IM=\sqrt{(2-2b)^2+(1-b)^2}$

Ta có: $K \in (C)$ nên $R=IK=\sqrt{(4-2b)^2+(3-b)^2}$

$\widehat{AMB}=90^0 \Rightarrow \widehat{AMI}=45^0 \Rightarrow \Delta IAM$ vuông cân tại M

Suy ra: $IA^2+AM^2=IM^2 \Leftrightarrow 2IA^2=IM^2 \Leftrightarrow 2R^2=IM^2$

$$\Leftrightarrow 2(5b^2-22b+25)=5b^2-10b+5 \Leftrightarrow 5b^2-34b+45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=5 \\ b=\frac{9}{5} \end{array}\right.$$

Ta có: I, M nằm khác phía đối với đường thẳng d nên:

$-50(b-3)<0 \Leftrightarrow b-3>0 \Leftrightarrow b>3$ nên $b=\frac{9}{5}<3$ (loại).

Phương trình đường tròn (C): $(x-5)^2+(y-5)^2=40$

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn

Phương pháp:

1. Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$, bán kính R của đường tròn (C).
2. Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ đi qua M, có véc tơ pháp tuyến: $\vec{n}=\overrightarrow{IM}=(x_0-a; y_0-b)$
3. Sử dụng điều kiện để đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$ với $A^2+B^2>0$ tiếp xúc với đường tròn (C) là: $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R$

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C)

a. Tại điểm M(5; 1).

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $4x+3y-1=0$

c. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+2y+3=0$

Giải

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: $I(2; -3)$, $R = 5$

a. Tiếp tuyến với (C) tại M có véc tơ pháp tuyến: $\vec{n} = \overrightarrow{IM} = (3;4)$

Phương trình tiếp tuyến: $3(x-5)+4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-19=0$

b. Tiếp tuyến d song song với đường thẳng $4x + 3y - 1 = 0$ có dạng: $4x+3y+C=0$

Ta có: $d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|8-9+C|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5 \Leftrightarrow |C-1|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=26 \\ C=-24 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến: $4x+3y-26=0$ hoặc $4x+3y-24=0$

c. Tiếp tuyến d vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 5 = 0$ có dạng: $2x-y+C=0$

Ta có: $d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|7+C|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=5 \Leftrightarrow |7+C|=5\sqrt{5} \Leftrightarrow C=-7\pm 5\sqrt{5}$

Phương trình tiếp tuyến: $2x-y-7\pm 5\sqrt{5}=0$

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y=0$ và điểm A(4; 7).

a. Chứng minh điểm A nằm ngoài đường tròn (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm A.

b. Gọi M, N là các tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A. Viết phương trình đường thẳng MN và tính độ dài đoạn thẳng MN.

Giải

a. Ta có: $P(A/(C)) = 4^2+7^2+2.4-4.7=45>0$ nên điểm A nằm ngoài đường tròn (C).

Gọi d là đường thẳng đi qua A thì phương trình của d: $Ax+By-4A-7B=0$

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: $I(-1; 2)$, $R=\sqrt{5}$

Ta có: $d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{5|A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 2A^2+2B^2+5AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=-2A \\ A=-2B \end{array}\right.$

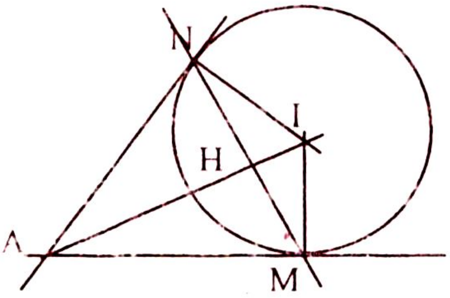
Phương trình tiếp tuyến: $x-2y+10=0$ hoặc $2x-y-1=0$

b. Ta có: $NI \perp AN$ và $IM \perp AM$

$\Rightarrow$ Tứ giác ANIM nội tiếp đường tròn (C'), đường kính AI.

Phương trình đường tròn (C'):

$$x^2+y^2-3x-9y+10=0$$



Đường thẳng MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') có phương trình: $x + y - 2 = 0$

Phương trình đường thẳng AI: $x - y + 3 = 0$ và gọi $H = MN \cap AI$ $\Rightarrow H\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, $MN = 2NH$, $MN \perp AI$.

Ta có: $HI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$NH^2 = R^2 - HI^2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow NH = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow MN = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Bài 3. (Khối D–2007) Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng d: $3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là hai tiếp điểm) sao cho ΔPAB đều.

Giải

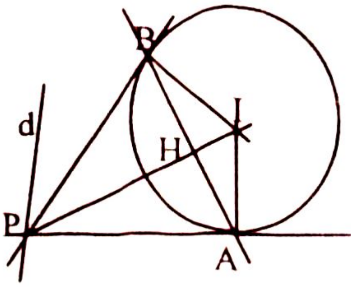
Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(1; -2)$, $R = 3$

Ta có: $IA \perp PA$ và ΔPAB đều $\Rightarrow \widehat{API} = 30^0$

Xét tam giác vuông PAI:

$$PI = \frac{AI}{\sin\widehat{API}} = \frac{AI}{\sin 30^0} = 2AI = 6$$

$\Rightarrow$ P thuộc đường tròn (C') tâm I, bán kính $R' = 6$



Mặt khác: $P \in d$ và P là điểm duy nhất nên đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C')

Suy ra: $d(I,d) = \frac{|3+8+m|}{\sqrt{3^2+4^2}} = R' \Leftrightarrow |11+m| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 19 \\ m = -41 \end{array}\right.$

Bài 4. Viết phương tiếp tuyến chung của các cặp đường tròn sau:

a. $(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

b. $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

c. $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

Giải

a. Ta có tâm và bán kính đường tròn (C_1), (C_2) là:

$I_1(0; 2)$, $R_1 = 3$ và $I_2(3; -4)$, $R_2 = 3$

Gọi $\Delta: Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1), (C_2)

Khi đó: $\begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \\ \dfrac{|3A-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \\ |3A-4B+C|=|2B+C| \end{cases}$

* Khi $3A-4B+C=2B+C \Leftrightarrow A=2B$, ta có:

$$\frac{|2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \Leftrightarrow |2B+C|=3|B|\sqrt{5} \Leftrightarrow C=B\left(-2\pm 3\sqrt{5}\right)$$

Phương trình đường thẳng $\Delta: 2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

* Khi $3A-4B+C=-2B-C \Leftrightarrow C=B-\dfrac{3A}{2}$,

Ta có: $\dfrac{|2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \Leftrightarrow \left|B-\dfrac{A}{2}\right|=\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0, C=B \\ A=-\dfrac{4}{3}B, C=3B \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng $\Delta: y+1=0$ hoặc $4x+3y+9=0$

b. Ta có tâm và bán kính đường tròn (C_1), (C_2) là: $I_1(5;0)$, $R_1=5$ và $I(-2;1)$, $R_2=5$

$0=|R_1-R_2|<I_1I_2=5\sqrt{2}<R_1+R_2=10 \Rightarrow (C_1)\cap(C_2)=\{A;B\}$: Cắt tại hai điểm phân biệt A, B

Mặt khác: $R_1=5=R_2$ nên có hai tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1), (C_2) và hai tiếp tuyến này song song với đường nối tâm I_1I_2

Gọi Δ là đường thẳng song song với I_1I_2 thì phương trình đường thẳng Δ: $x+7y+C=0$

Khi đó: $d(I_1,\Delta)=R_1 \Leftrightarrow \dfrac{|5+C|}{5\sqrt{2}}=5 \Leftrightarrow C=-5\pm 25\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng $\Delta: x+7y-5\pm 25\sqrt{2}=0$

c. Ta có tâm và bán kính đường tròn (C_1), (C_2) là: $I_1(2;1)$, $R_1=1$ và $I(-2;-1)$, $R_2=3$

Gọi $\Delta: Ax+By+C=0$ với $A^2+B^2>0$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1), (C_2)

Khi đó:

$$\begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|2A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1 \\ \dfrac{|-2A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2A+B+C|=\sqrt{A^2+B^2} \\ |-2A-B+C|=3|2A+B+C| \end{cases}$$

* Khi $-2A - B + C = 3(2A + B + C) \Leftrightarrow C = -4A - 2B$

Ta có: $|2A + B + C| = \sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow 3A^2 + 4AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0; C = -2B \\ A = -\frac{4}{3}B; C = \frac{10}{3}B \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng $\Delta: y - 2 = 0$ hoặc $4x - 3y - 10 = 0$

* Khi $-2A - B + C = -3(2A + B + C) \Leftrightarrow C = -A - \frac{B}{2}$

Ta có: $|2A + B + C| = \sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow AB - \frac{3}{4}B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0; C = -A \\ A = \frac{3}{4}B; C = -\frac{5}{4}B \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng $\Delta: x - 1 = 0$ hoặc $3x + 4y - 5 = 0$

Bài tập tự luyện

Bài 1. a. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ tại điểm $A(-5;7)$

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + y - 12 = 0$ tại các giao điểm của đường thẳng d: $x + 2y + 4 = 0$ với (C).

Bài 2. a. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng: $2x + y - 7 = 0$

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: $x - 2y + 9 = 0$

Bài 3. a. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(4;7)$

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x = 0$, biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc bằng 60^0.

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3; 1)$.

a. Chứng minh điểm M nằm ngoài đường tròn (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm M.

b. Gọi A, B là các tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua M. Viết phương trình đường thẳng AB và tính độ dài đoạn thẳng AB.

Bài 5. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ và điểm $A(-1; 2)$. Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) đi qua A. Tìm tọa độ các tiếp điểm.

Bài 6. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân

Bài 7. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng d: x + y + m = 0. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho ΔABC vuông tại A.

Bài 8. Viết phương tiếp tuyến chung của các cặp đường tròn sau:

a. $(C_1): x^2+y^2-1=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-4y-1=0$

b. $(C_1): x^2+y^2+4x+3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x+12=0$

Bài 9. Cho các đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ và $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+4my=5$

a. Chứng minh rằng có hai đường tròn $(C_{m_1}), (C_{m_2})$ tiếp xúc với đường tròn (C).

b. Viết phương tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_{m_1}), (C_{m_2})$

Hướng dẫn giải

Bài 1. a. 3x – 4y + 43 = 0

b. 8x + y + 17 = 0; 4x – 7y – 44 = 0

Bài 2. a. Tâm và bán kính của (C) là I(–5; 1), R = $\sqrt{20}$.

Tiếp tuyến d song song với: 2x + y – 7 = 0 nên có dạng: $2x+y+C=0$ và

$$d(I,d)=\frac{|C-9|}{\sqrt{5}}=\sqrt{20}\Leftrightarrow|C-9|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=19\\C=-1\end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến d: $2x+y+19=0$ hoặc $2x+y-1=0$

b. Tâm và bán kính của (C) là I(1; –2), R = $\sqrt{5}$.

Tiếp tuyến d vuông góc với: x –2y + 9 = 0 nên có dạng: $2x+y+C=0$ và

$$d(I,d)=\frac{|C|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|C|=5\Leftrightarrow C=\pm5$$

Phương trình tiếp tuyến d: $2x+y+5=0$

Bài 3. a. Đường thẳng Δ đi qua điểm A có phương trình: $Ax+By-4A-7B=0$ với $A^2+B^2>0$

Tâm và bán kính của (C) là I(–1; 2), R = $\sqrt{5}$

Ta có: $$d(I,\Delta)=\frac{|-A+2B-4A-7B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow 2A^2+2B^2+5AB=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=-2A\\A=-2B\end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến $\Delta: x-2y+10=0$ hoặc $\Delta: 2x-y-1=0$

b. Phương trình $\Delta: Ax+By+C=0$ với $A^2+B^2>0$ tạo với trục tung một góc bằng 60^0 nên:

$$\cos60^0 = \frac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{i}\right|} \text{ với } \vec{n} = (A;B);\ \vec{i} = (1;0) \Rightarrow \cos60^0 = \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow B^2 = 3A^2$$

Tâm và bán kính của (C) là $I(-1;\ 0)$, $R = 1$

Ta có: $d(I,\Delta) = \dfrac{|-A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1 \Leftrightarrow 3A^2 - C^2 + 2AC = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = -A \\ C = 3A \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến $\Delta : x \pm \sqrt{3}y - 1 = 0$ hoặc $\Delta : x \pm \sqrt{3}y + 3 = 0$

Bài 4. a. $P(M/(C)) = 9 + 1 + 6 - 6 + 6 = 16 > 0 \Rightarrow$ M nằm ngoài đường tròn (C).

Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) đi qua điểm M:
$y - 1 = 0$ hoặc $4x - 3y + 15 = 0$

b. Phương trình đường thẳng AB: $2x + y - 3 = 0$ và $AB = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

Bài 5. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(1;\ -2)$, $R = 2$

Đường thẳng Δ đi qua điểm A có phương trình: $Ax + By + A - 2B = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$

Ta có: $d(I,\Delta) = \dfrac{|2A - 4B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \Leftrightarrow 3B^2 - 4AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = \dfrac{4A}{3} \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến $\Delta_1 : x + 1 = 0$ hoặc $\Delta_2 : 3x + 4y - 5 = 0$

* Tiếp điểm M của đường thẳng Δ_1 với đường tròn (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-2)$$

* Đường thẳng d đi qua tâm I, vuông góc với đường thẳng Δ_2 có phương trình: $4x - 3y - 10 = 0$

Tiếp điểm của đường thẳng Δ_2 với đường tròn (C) là $N = d \cap \Delta_2$

$$\Rightarrow N\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$$

Bài 6. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(1;\ 1)$, $R = 1$

Gọi Δ là đường thẳng tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân thi Δ vuông góc với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$ và $O \notin \Delta$

* Khi Δ vuông góc với đường thẳng $y = x$ thì phương trình Δ có dạng $\Delta : x + y + C = 0$

$$d(I,\Delta) = \frac{|2+C|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |2+C| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow C = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

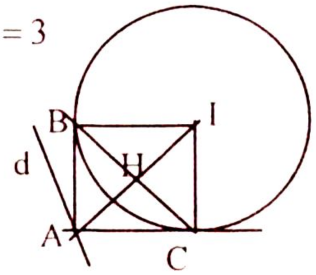
Phương trình đường thẳng $\Delta: x + y - 2 \pm 2\sqrt{2} = 0$

* Khi Δ vuông góc với đường thẳng $y = -x$ thì phương trình Δ có dạng: $\Delta: x - y + C = 0$

$$d(I,\Delta) = \frac{|C|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |C| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow C = \pm 2\sqrt{2}$$

Phương trình đường thẳng $\Delta: x - y \pm 2\sqrt{2} = 0$

Bài 7. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(1; -2)$, $R = 3$



Ta có: $IC \perp CA$, $IB \perp BA$ và ΔABC vuông

$\Rightarrow$ ABIC là hình vuông

$\Rightarrow AI = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ A thuộc đường tròn (C') tâm I, bán kính $R' = 3\sqrt{2}$

Mặt khác: $A \in d$ và A là điểm duy nhất nên đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C')

Suy ra: $d(I,d) = \dfrac{|-1+m|}{\sqrt{2}} = R' \Leftrightarrow |m-1| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m = -5 \end{array}\right.$

Bài 8. a. Ta có (C_1), (C_2) cắt nhau nên có hai tiếp tuyến chung: $y + 1 = 0$ hoặc $x + 1 = 0$

b. Ta có (C_1), (C_2) ngoài nhau nên có 4 tiếp tuyến chung: $x \pm y\sqrt{35} + 8 = 0$ hoặc $x \pm y\sqrt{3} = 0$

Bài 9. a. Tâm và bán kính đường tròn (C) là $O(0; 0)$, $R_1 = 1$ và đường tròn (C_m): $I(m + 1; -2m)$, $R_2 = \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$

Ta có: $OI = \sqrt{5m^2 + 2m + 1} < R_2, \forall m \in \mathbb{R}$ nên đường tròn (C) và (C_m) chỉ xảy ra tiếp xúc trong

Suy ra:

$$|R_2 - R_1| = OI \Leftrightarrow \left|\sqrt{5m^2 + 2m + 6} - 1\right| = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -1 \\ m_2 = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy, luôn có hai đường tròn $(C_{m_1}), (C_{m_2})$ tiếp xúc với đường tròn (C).

b. Khi đó: $(C_{m_1}): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $(C_{m_2}): \left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 9$ có hai tiếp tuyến chung: $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng liên quan với đường tròn

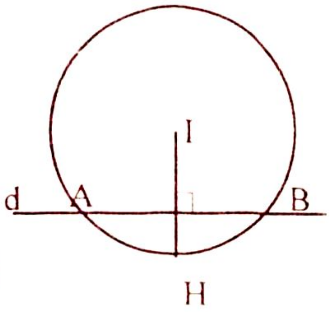
Phương pháp:

1. Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$, bán kính R của đường tròn (C).
2. Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B:
   - Nếu H là trung điểm AB thì $IH \perp AB$
   - Nếu $IH \perp AB$ ($H \in AB$) thì H là trung điểm AB

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 8

Giải



Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B, phương trình đường thẳng d:

$Ax + By = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$

Tâm và bán kính của đường tròn (C): I(1; –3), R = 5

Kẻ $IH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \dfrac{AB}{2} = 4$

Xét tam giác vuông IAH: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

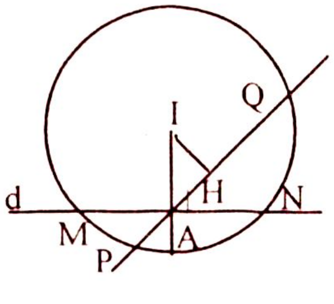
$$d(I,d) = \frac{|A - 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = IH = 3 \Leftrightarrow 4A^2 + 3AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ A = -\dfrac{3B}{4} \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng d: y = 0 hoặc 3x – 4y = 0

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ và điểm A(4; –5). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài:

a) Lớn nhất b) Nhỏ nhất

Giải



Ta có: $P(A/(C)) = -20 < 0 \Rightarrow A$ nằm trong (C)

Tâm và bán kính của (C) là I(2; –4), R = 5

a. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài lớn nhất

Suy ra: Δ đi qua tâm I của (C).

Phương trình đường thẳng Δ: x + 2y + 6 = 0

b. Gọi d là đường thẳng đi qua A, cắt (C) tại hai điểm P, Q. Kẻ $IH \perp d$ thì $IH \leq AI$. Để đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất thì IH lớn nhất

$$\Rightarrow \max(IH) = IA \Rightarrow H \equiv A$$

Suy ra, d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với AI có phương trình: $2x - y - 8 = 0$

Bài 3. Cho đường tròn (C): $(x+6)^2 + (y-6)^2 = 50$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại M và cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB

Giải

Tâm của đường tròn (C) là I(−6; 6). Gọi A(a; 0) và B(0; b) với $ab \neq 0$ và M là trung điểm AB

$\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right)$. Đường thẳng AB tiếp xúc với (C) tại M nên:

$$\begin{cases} M \in (C) \\ IM \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in (C) \\ \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{a}{2} + 6; \dfrac{b}{2} - 6\right)$ và $\overrightarrow{AB} = (-a; b)$ nên

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -a\left(\frac{a}{2} + 6\right) + b\left(\frac{b}{2} - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b + a = 0 \\ b - a - 12 = 0 \end{array}\right.$$

và $M \in (C) \Rightarrow \left(\dfrac{a}{2} + 6\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 6\right)^2 = 50$

* Ta có:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \left(\dfrac{a}{2} + 6\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 6\right)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ \left(\dfrac{a}{2} + 6\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 6\right)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2; b = 2 \\ a = -22, b = 22 \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng d: $x - y + 2 = 0$ hoặc $x - y + 22 = 0$

* Ta có: $\begin{cases} b = a + 12 \\ \left(\dfrac{a}{2} + 6\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 6\right)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 12 \\ a^2 + 36a + 260 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -10; b = 2 \\ a = -26, b = -14 \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng d: $x - 5y + 10 = 0$ hoặc $7x + 13y + 182 = 0$

Bài 4. (A–2009) Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

Giải

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(−2; −2), $R = \sqrt{2}$

Đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Kẻ đường cao IH của ΔIAB

Ta có:

$$dt(\Delta IAB) = \frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2}R^2.\sin\widehat{AIB} = \sin\widehat{AIB} \le 1 \Rightarrow \max(dt(\Delta IAB)) = 1$$

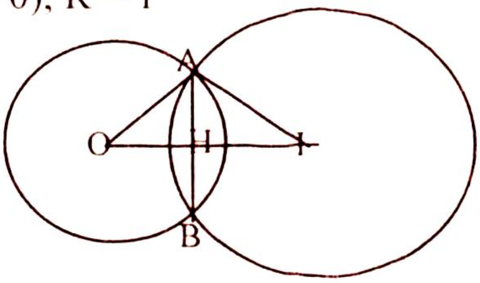
khi $\widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow \Delta IAB$ vuông cân tại $I \Rightarrow IH = \frac{1}{2}AB = \frac{R\sqrt{2}}{2} = 1 < R$

Ta có: $IH = d(I,d) = \dfrac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{8}{15} \end{array}\right.$

Bài 5. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. Gọi (C') là đường tròn có tâm I(2; 2) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = $\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB

Giải

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: O(0; 0), R = 1



Ta có: OI ⊥ AB tại H và $HB = HA = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác vuông OHA:

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $OI = 2\sqrt{2}$

$HI = OI - OH = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ và $AI^2 = AH^2 + HI^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

Phương trình đường tròn (C'):

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

Đường thẳng AB là trục đẳng phương của (C) và (C') có phương trình:

$x + y - 1 = 0$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho đường tròn (C): $(x-4)^2 + y^2 = 25$ và điểm M(1; −1). Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho MA = 3MB.

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Gọi (C') là đường tròn có tâm M(5; 1) cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB = $\sqrt{3}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 3. Cho hai đường tròn (C_1): $x^2+y^2=13$ và (C_2): $(x-6)^2+y^2=25$ cắt nhau tại A(2;3). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ và đường thẳng d: 4x – 3y + 2 = 0. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho AB = 6

Bài 5. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$ với m là tham số thực. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔOAB lớn nhất.

Bài 6. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2=9$ và $(C_2): x^2+y^2-2x-2y-23=0$. Viết phương trình trục đẳng phương d của hai đường tròn (C_1), (C_2). Tìm tọa độ điểm K $\in$d sao cho khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) bằng 5.

Bài 7. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-4y=0$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại M và cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB

Hướng dẫn giải

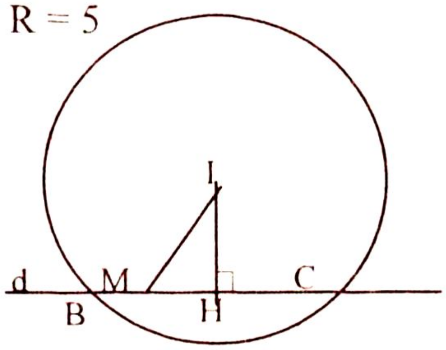
Bài 1. Ta có: $P\left(M/(C)\right)=9+1-25=-15<0 \Rightarrow M$ nằm trong (C)

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(4; 0), R = 5

Giả sử đường thẳng d đi qua M, cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho MA = 3MB.

Kẻ IH ⊥ AB ⇒HB = HA = $\frac{AB}{2}$

Mặt khác: MA = 3MB $\Rightarrow MH=\frac{AB}{4}=\frac{BH}{2}$



$$IH^2=IM^2-MH^2=IM^2-\frac{BH^2}{4}=IM^2-\frac{\left(IB^2-IH^2\right)}{4}=IM^2-\frac{\left(R^2-IH^2\right)}{4}$$

$$\Leftrightarrow IH^2=\frac{4IM^2-R^2}{3}=\frac{40-25}{3}=5\Rightarrow IH=\sqrt{5}$$

Đường thẳng d đi qua M, phương trình có dạng: $Ax+By+B-A=0$ với $A^2+B^2>0$

$$d\left(I,d\right)=IH \Leftrightarrow \frac{\left|4A+B-A\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow 2A^2-2B^2+3AB=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B=2A\\A=-2B\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng d: x + 2y + 1 = 0 hoặc 2x – y – 3 = 0

Bài 2. Phương trình đường thẳng AB: 8x + 6y – 11 = 0

Bài 3. Gọi tâm và bán kính của đường tròn (C_1), (C_2) là $O(0;0)$, $R_1 = \sqrt{13}$ và $I(6;\ 0)$, $R_2 = 5$

Giả sử đường thẳng d đi qua A, cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung AB = AC

Kẻ $OK \perp AB$, $IH \perp AC \Rightarrow KA = AH$

Ta có: $OA^2 - OK^2 = KA^2$ và

$IA^2 - IH^2 = AH^2 \Leftrightarrow 13 - OK^2 = 25 - IH^2 \Leftrightarrow IH^2 - OK^2 = 12$

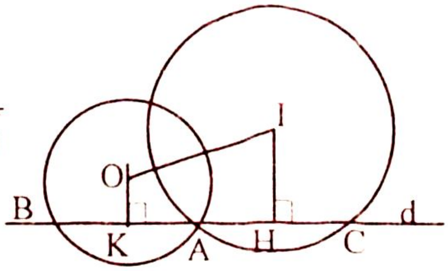
$\Leftrightarrow (IH + OK)(IH - OK) = 12$. Gọi J(3; 0) là trung điểm của OI thì $IH + OK = 2AJ = 2\sqrt{10}$

Suy ra: $IH - OK = \dfrac{12}{IH + OK} = \dfrac{12}{2\sqrt{10}} = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$ nên

$$\begin{cases} IH + OK = 2\sqrt{10} \\ IH - OK = \dfrac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH = \dfrac{13\sqrt{10}}{10} \\ OK = \dfrac{7\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Đường thẳng d đi qua A nên phương trình có dạng: $Ax + By - 2A - 3B = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$

$$d(O,d) = \frac{|2A + 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = OK \Leftrightarrow \frac{|2A + 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$



$$\Leftrightarrow 9A^2 - 41B^2 - 120AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{41B}{3} \\ B = -3A \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng d: $41x + 3y - 91 = 0$ hoặc $x - 3y + 7 = 0$

Bài 4. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(1; -3)$, $R = 5$

Đường thẳng Δ vuông góc với d nên phương trình có dạng: $3x + 4y + C = 0$

Đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm A, B. Kẻ $IH \perp AB \Rightarrow HA = HB = \dfrac{AB}{2} = 3$

$IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ và

$$d(I,\Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|3 - 12 + C|}{5} = 4 \Leftrightarrow |C - 9| = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 29 \\ C = -11 \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: $3x + 4y + 29 = 0$ hoặc $3x + 4y - 11 = 0$

Bài 5. $m = \pm 1$

Bài 6. Trục đẳng phương d của hai đường tròn (C_1), (C_2) có phương trình: $x + y + 7 = 0$

Tâm của đường tròn (C_1) là O(0; 0). Gọi $K(x; -x-7) \in d$

$OK = \sqrt{x^2 + (-x-7)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -4 \end{array}\right.$ nên K(−3; −4) hoặc K(−4; −3)

Bài 7. Phương trình đường thẳng d: $x + y - 8 = 0$

hoặc $\left(1-\sqrt{3}\right)x + \left(1+\sqrt{3}\right)y + 4 = 0$ hoặc $\left(1+\sqrt{3}\right)x + \left(1-\sqrt{3}\right)y + 4 = 0$

Dạng 4. Tìm tọa độ điểm liên quan với đường tròn.

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ và đường thẳng d: $x - 4y - 2 = 0$. Tìm M∈d sao cho đường tròn tâm M, bán kính gấp đôi đường tròn (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C)

Giải

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(1; -1), R = 1

Gọi (C') là đường tròn tâm M(4b + 2; b) ∈ d, bán kính R' = 2R = 2 tiếp xúc ngoài với (C).

Khi đó:

$$IM = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{(4b+1)^2 + (b+1)^2} = 3 \Leftrightarrow 17b^2 + 10b - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = \dfrac{7}{17} \end{array}\right.$$

Vậy, $M(-2;-1)$ hoặc $M\left(\dfrac{62}{17};\dfrac{7}{17}\right)$

Bài 2. (B–2009) Cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + y^2 = \dfrac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y = 0$, $\Delta_2 : x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1), biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

Giải

Đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên tâm K thuộc đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Phương trình phân giác: $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{x-7y}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2x \\ y = \dfrac{1}{2}x \end{array}\right.$.

Tâm K thuộc đường tròn (C).

* K là giao điểm của đường thẳng y = −2x và đường tròn (C), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=-2x \\ (x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ 25x^2-20x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ (5x-2)^2+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow x,y\in\varnothing$$

* K là giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x$ và đường tròn (C), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x \\ (x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x \\ 25x^2-80x+64=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x \\ (5x-8)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{5} \\ x=\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Tâm $K\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{4}{5}\right)$, bán kính $R=d\left(K,\Delta_1\right)=\dfrac{\left|\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

Bài 3. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x+5=0$. Tìm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn (C) và góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^0

Giải

Gọi tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(3; 0), R = 2 và A, B là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn (C).

Ta có: $\widehat{AMB}=60^0\Rightarrow\widehat{AMI}=30^0\Rightarrow IM=2IA=4$ nên M thuộc đường tròn (C'), tâm I và bán kính R' = 4. Phương trình đường tròn (C'). $(x-3)^2+y^2=16$

Mặt khác: M thuộc trục tung nên M là giao điểm của đường tròn (C') và trục tung có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=0 \\ (x-3)^2+y^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

nên $M\left(0;\sqrt{7}\right)$ hoặc $M\left(0;-\sqrt{7}\right)$

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-6y+9=0$ và đường thẳng d: 3x − 4y + 5 = 0. Tìm M ∈(C) và N∈d sao cho MN có độ dài: a) Nhỏ nhất b) Lớn nhất

Giải

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(-1;3)$, $R = 1$

$d(I,d) = \dfrac{|-3-12+5|}{5} = 2 > 1 = R \Rightarrow d$ không cắt đường tròn (C)

Gọi Δ là đường thẳng song song với d nên phương trình có dạng: $3x - 4y + C = 0$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) khi:

$$d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-3-12+C|}{5} = 1 \Leftrightarrow |C-15| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 20 \\ C = 10 \end{array}\right.$$

Đặt $\Delta_1 : 3x - 4y + 20 = 0$ và $\Delta_2 : 3x - 4y + 10 = 0$

Đường thẳng d_1 đi qua I, vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình: $4x + 3y - 5 = 0$

$N = d_1 \cap d \Rightarrow N\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)$, $M_1 = d_1 \cap \Delta_1 \Rightarrow M_1\left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{19}{5}\right)$, $M_2 = d_1 \cap \Delta_2$

$\Rightarrow M_2\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{5}\right)$

Ta có: $NM_1 = 3$ và $NM_2 = 1 \Rightarrow NM_1 > NM_2$

MN có độ dài nhỏ nhất khi $M \equiv M_2$; MN có độ dài lớn nhất khi $M \equiv M_1$

Bài 5. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Tìm M thuộc d: $2x - y + 3 = 0$ sao cho: $MI = 2R$, trong đó I là tâm và R là bán kính của (C).

Giải

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(2;3)$, $R = 5$. Gọi $M(a; 2a+3) \in d$

và $IM = 2R \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = 10 \Leftrightarrow 5a^2 - 4a - 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{24}{5} \\ a = -4 \end{array}\right.$

Điểm $M\left(\dfrac{24}{5};\dfrac{63}{5}\right)$ hoặc $M(-4;-5)$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng d: $x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD ngoại tiếp (C), biết đỉnh A thuộc d.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại B và nội tiếp đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$, biết $A(2;0)$ và diện tích tam giác ABC bằng 4. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Bài 3. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ và đường thẳng d: $x - y + 1 = 0$. Tìm M thuộc đường thẳng d mà qua đó kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^0$

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng d: x + y + 1 = 0. Tìm M thuộc đường thẳng d sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn (C) và góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 90^0

Bài 5. Cho đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-3)^2=1$ và $M\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. Tìm N $\in$(C) sao cho MN có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(4; –3), R = 2. Hình vuông ABCD ngoại tiếp (C) có cạnh AB = 2R = 4, đường chéo

AC $= AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow AI = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$

Gọi A(a; –a + 1) $\in$d và $AI = \sqrt{2(a-4)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a-4| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=2 \end{array}\right.$

* Khi A(6; –5), điểm C đối xứng với A qua I nên C(2; – 1)

Gọi B(x; y) thì $\overrightarrow{IB} = (x-4; y+3); \overrightarrow{IC} = (-2; 2)$ và

$$\begin{cases} \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{IC} \\ IB = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-4)+2(y+3)=0 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+7 \\ (y+3)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1; x=6 \\ y=-5; x=2 \end{array}\right.$$

nên B(6; –1), D(2; –5) hoặc B(2; –5), D(6; –1)

* Khi A(2; –1), điểm C đối xứng với A qua I nên C(6; – 5)

Gọi B(x; y) thì $\overrightarrow{IB} = (x-4; y+3); \overrightarrow{IA} = (-2; 2)$ và

$$\begin{cases} \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{IA} \\ IB = IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-4)+2(y+3)=0 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+7 \\ (y+3)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1; x=6 \\ y=-5; x=2 \end{array}\right.$$

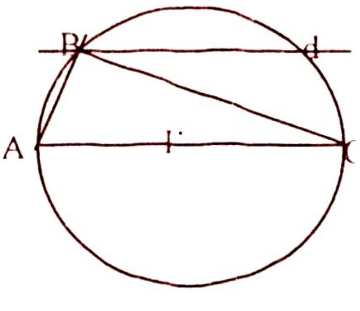
nên B(6; –1), D(2; –5) hoặc B(2; –5), D(6; –1)

Bài 2. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(1; –2), R = $\sqrt{5}$

Tam giác ABC vuông tại B và nội tiếp đường tròn (C) nên I là trung điểm AC $\Rightarrow$ C đối xứng với A qua I nên C(0; –4)

AC = 2R = $2\sqrt{5}$. Gọi $h = d(B, AC)$

$$dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}h.AC = \frac{1}{2}h.2\sqrt{5} = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{5}}$$



Đường thẳng d song song với AC có phương trình: $2x - y + C = 0$

$$h = d(B, AC) = d(A, d) = \frac{|4+C|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |4+C| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=0 \\ C=-8 \end{array}\right.$$

Đặt $d_1: 2x - y = 0$ và $d_2: 2x - y - 8 = 0$ thì B là giao điểm của d_1, d_2 với đường tròn (C)

* B là giao điểm của d_1 với đường tròn (C), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = -\dfrac{6}{5}; y = -\dfrac{12}{5} \end{array} \right.$$

Nên B ≡ O(0;0) hoặc $B\left(-\dfrac{6}{5}; -\dfrac{12}{5}\right)$

* B là giao điểm của d_2 với đường tròn (C), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 8 \\ 5x^2 - 26x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{16}{5}; y = -\dfrac{8}{5} \\ x = 2; y = -4 \end{array} \right.$$

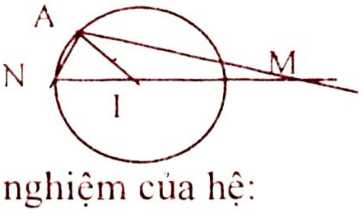
Nên $B\left(\dfrac{16}{5}; -\dfrac{8}{5}\right)$ hoặc $B(2; -4)$

Bài 3. M(3; 4) hoặc M(−3; −2)

Bài 4. M(1; −2) hoặc M(−1; 0)

Bài 5. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(−1; 3), R = 1

Ta có: $P(M/(C)) = \left(\dfrac{1}{5} + 1\right)^2 + \left(\dfrac{7}{5} - 3\right)^2 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (C)



Phương trình đường thẳng IM:

4x + 3y − 5 = 0

Giao điểm của IM và đường tròn (C), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ (x+1)^2 = \dfrac{9}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5}; y = \dfrac{11}{5} \\ x = -\dfrac{8}{5}; y = \dfrac{19}{5} \end{array} \right.$$

nên $N_1\left(-\dfrac{2}{5}; \dfrac{11}{5}\right); N_2\left(-\dfrac{8}{5}; \dfrac{19}{5}\right)$

Ta có: $MN_1 = 1$ và $MN_2 = 3$ nên $MN_2 > MN_1 \Rightarrow N \equiv N_2\left(-\dfrac{8}{5}; \dfrac{19}{5}\right)$

Mặt khác: Lấy A ∈(C), ta có: $AM \le AI + IM = NI + IM = MN \Rightarrow AM \le MN$ nên NM là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất.

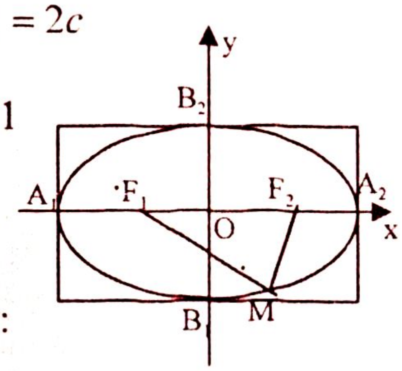
§5. ELIP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình chính tắc

$(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = b^2 + c^2$ và a, b, c > 0

– Các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c$



– Độ dài trục lớn 2a, trục bé 2b, tâm sai $e = \dfrac{c}{a} < 1$

– Đường chuẩn $x = \pm\dfrac{a}{e}$

– Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở: $x = \pm a;\ y = \pm b$

– Bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y) \in (E)$:

$MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x$ và $MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x$

– Các đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$

2. Điều kiện tiếp xúc

Xét elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = b^2 + c^2$, đường thẳng $\Delta: \mathrm{Ax} + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ và điểm $M(x_0;y_0) \in (E)$

– Đường thẳng tiếp xúc elip tại $M(x_0;y_0) \in (E)$ (gọi là tiếp tuyến của (E)) có phương trình $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

– Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) là:

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình chính tắc của elip

Phương pháp:

1. Phương trình chính tắc của elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = b^2 + c^2$ và a, b, c > 0

2. Từ các yếu tố đã cho đi xác định a, b

Bài tập mẫu

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a. Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

b. Đi qua hai điểm $M\left(4;\sqrt{3}\right)$ và $N\left(2\sqrt{2};-3\right)$

Giải

a. Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$ và a, b, c > 0

Hình chữ nhật cơ sở có chu vi: $2(2a+2b)=20\Leftrightarrow a+b=5$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow c=\frac{a\sqrt{5}}{3}\Rightarrow c^2=\frac{5a^2}{9}=a^2-b^2\Leftrightarrow\frac{4a^2}{9}-b^2=0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a+b=5\\ \frac{4a^2}{9}-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5-a\\ a^2-18a+45=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3;b=2\\ a=15;b=-10\end{array}\right.$

Do b > 0 nên b = −10 (loại). Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b. Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$ và a, b, c > 0

Ta có: $M,N\in(E)\Rightarrow\begin{cases}\frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\\ \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{1}{20}\\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=20\\ b^2=15\end{cases}$

Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a. Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kính qua tiêu là 9 và 15

b. Độ dài trục nhỏ bằng 12 và tiêu cự bằng 16.

Giải

a. Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$ và a, b, c > 0

Phương trình đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}$ nên khoảng cách giữa các đường chuẩn: $\frac{2a}{e}=36\Leftrightarrow a^2=18c$

Bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)\in(E)$: $MF_1=a+\frac{c}{a}x$ và $MF_2=a-\frac{c}{a}x$

Nên $MF_1+MF_2=2a \Leftrightarrow 2a=9+15=12 \Leftrightarrow a=12$ nên

$$c=\frac{a^2}{18}=\frac{12^2}{18}=8 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=80$$

Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$

Bài 3. Cho hai đường thẳng $d_1: 3x-2y-20=0$ và $d_2: x+6y-20=0$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết elip tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2.

Giải

Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$ và a, b, $c>0$

Elip tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases}9a^2+4b^2=400\\ a^2+36b^2=400\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=40\\ b^2=10\end{cases}$$

Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng liên quan đến elip

Phương pháp:

1. Xét elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$
2. Phương trình tiếp tuyến với elip (E) tại $M(x_0;y_0)\in(E)$ là: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$
3. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$ với $A^2+B^2>0$ tiếp xúc với (E) là: $A^2a^2+B^2b^2=C^2$

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d_m: mx-y-1=0$

a. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng d_m luôn cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $N(1;-3)$

Giải

a. Ta có: $mx - y - 1 = 0 \Rightarrow y = mx - 1$. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d_m và elip là:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(mx-1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \left(4 + 9m^2\right)x^2 - 18mx - 27 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 81m^2 + 27\left(4 + 9m^2\right) = 108\left(3m^2 + 1\right) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên đường thẳng d_m luôn cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt.

b. Gọi Δ là đường thẳng đi qua N, phương trình đường thẳng $\Delta : Ax + By + 3B - A = 0$, $A^2 + B^2 > 0$. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) nên: $9A^2 + 4B^2 = (3B - A)^2 \Leftrightarrow 8A^2 - 5B^2 + 6AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 2A \\ A = -\dfrac{5}{4}B \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng $\Delta : x + 2y + 5 = 0$ hoặc $5x - 4y - 17 = 0$

Bài 2. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ và các điểm $M(-2;3)$, $N(5;n)$. Viết phương trình các đường thẳng d_1, d_2 qua M và tiếp xúc với (E). Tìm n để trong số các tiếp tuyến của (E) đi qua N có một tiếp tuyến song song với d_1 hoặc d_2.

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua M, phương trình đường thẳng $d : Ax + By + 2A - 3B = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$.

Đường thẳng d tiếp xúc với (E) nên:

$$4A^2 + B^2 = (2A - 3B)^2 \Leftrightarrow 2B^2 - 3AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = \dfrac{3}{2}A \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng $d_1 : x + 2 = 0$ hoặc $d_2 : 2x + 3y - 5 = 0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N, phương trình đường thẳng $\Delta : Ax + By - 5A - Bn = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$. Đường thẳng d tiếp xúc với (E) nên: $4A^2 + B^2 = (-5A - Bn)^2 \Leftrightarrow 21A^2 + B^2\left(n^2 - 1\right) + 10ABn = 0$ (1)

* Trường hợp 1: Khi Δ song song với đường thẳng $d_1 \Rightarrow A = 0$ nên từ (1) ta có: $n^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \pm 1$

* Trường hợp 2: Khi Δ song song với đường thẳng d_2 nên

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} \neq \frac{5A + Bn}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{3A}{2} \\ A + Bn \neq 0 \end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$$21A^2+\frac{9}{4}A^2\left(n^2-1\right)+15A^2n=0\Leftrightarrow 3n^2+2n+25=0\Leftrightarrow n\in\varnothing$$

* Kết luận: $n=\pm1$

Bài 3. Cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{10};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{10};0\right)$ và độ dài trục lớn $2\sqrt{18}$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho tiếp tuyến với (E) tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B và diện tích tam giác OAB nhỏ nhất

Giải

Phương trình chính tắc của elip: $(E):\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(E)\Rightarrow\dfrac{x_0^2}{18}+\dfrac{y_0^2}{8}=1$ và phương trình tiếp tuyến với (E) tại M : $d:\dfrac{xx_0}{18}+\dfrac{yy_0}{8}=1\Leftrightarrow 4xx_0+9yy_0-72=0$ cắt Ox, Oy tại $A\left(\dfrac{18}{x_0};0\right)$; $B\left(0;\dfrac{8}{y_0}\right)$ với $x_0y_0\neq0$

$$dt\left(\Delta OAB\right)=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{72}{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$1=\frac{x_0^2}{18}+\frac{y_0^2}{8}\geq2\sqrt{\frac{x_0^2}{18}.\frac{y_0^2}{8}}\Leftrightarrow1=\frac{x_0^2}{18}+\frac{y_0^2}{8}\geq\frac{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}\geq\frac{1}{6}$$

Suy ra: $dt\left(\Delta OAB\right)=\dfrac{72}{\left|x_0\right|\left|y_0\right|}\geq72.\dfrac{1}{6}=12\Rightarrow min\left(dt\left(\Delta OAB\right)\right)=12$

$$\text{Khi}\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{18}+\dfrac{y_0^2}{8}=1\\ \dfrac{x_0^2}{18}=\dfrac{y_0^2}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2=9\\ y_0^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3,y_0=2;x_0=-3,y_0=2\\ x_0=3,y_0=-2;x_0=-3,y_0=-2\end{array}\right.$$

Vậy các điểm M là: (3; 2); (−3; 2); (3; −2); (−3; −2).

Bài 4. Cho elip $(E):9x^2+25y^2=225$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Giải

* Trường hợp 1. Đường thẳng d đi qua M, song song với Oy có phương trình: x = 1 cắt (E) tại hai điểm: $A\left(1;\frac{6\sqrt{6}}{5}\right); B\left(1;-\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$.

Khi đó: $\frac{y_A + y_B}{2} = 0 \neq y_M$ nên trường hợp này không xảy ra

* Trường hợp 2. Đường thẳng d đi qua M, không song song với Oy có phương trình dạng: $y = k(x-1)+1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $9x^2 + 25(kx+1-k)^2 = 225$

$\Leftrightarrow (9+25k^2)x^2 + 50k(1-k)x + 25(1-k)^2 - 225 = 0$ (1)

$\Delta' = 25\left[25k^2(1-k)^2 - (9+25k^2)(k^2-2k-8)\right] > 0$ (*)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ k(x_1 + x_2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$$

Áp dụng định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{50k(1-k)}{9+25k^2} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{25}$ thỏa mãn (*)

Phương trình đường thẳng $d: 9x + 25y - 34 = 0$

Bài 5. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và hai điểm $M(-2;m), N(2;n)$ với $m \neq n$. Gọi $A_1(-2;0), A_2(2;0)$

a. Viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M, tìm giao điểm I của chúng

b. Biết đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn cắt elip (E) tại một điểm duy nhất. Tìm tập hợp các giao điểm I

Giải

a. Phương trình các đường thẳng $A_1N: nx - 4y + 2n = 0$ và $A_2M: mx + 4y - 2m = 0$

$$I = A_1N \cap A_2M \Rightarrow \begin{cases} nx - 4y + 2n = 0 \\ mx + 4y - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(m-n)}{m+n} \\ y = \frac{4mn}{m+n} \end{cases} \text{ với } m + n \neq 0$$

b. Phương trình đường thẳng $MN:(n-m)x-4y+2(n+m)=0$ tiếp xúc với (E) nên $4mn=1$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x=\dfrac{2(m-n)}{m+n} \\ y=\dfrac{4mn}{m+n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{m-n}{m+n} \\ y=\dfrac{1}{m+n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}=\dfrac{m^2-2mn+n^2}{(m+n)^2} \\ y^2=\dfrac{1}{(m+n)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=\frac{m^2-2mn+n^2+1}{(m+n)^2}=\frac{m^2+2mn+n^2}{(m+n)^2}=1.$$

Tập hợp các điểm I là elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

Bài 6. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và điểm $M(1;2)$. Viết các đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (E). Gọi A, B lần lượt là các tiếp điểm, viết phương trình đường thẳng AB.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M có phương trình $\Delta: Ax+By-A-2B=0$, $A^2+B^2>0$. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) nên:

$$5A^2+4B^2=(A+2B)^2 \Leftrightarrow A^2-AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ A=B \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng $\Delta_1: y-2=0$ hoặc $\Delta_2: x+y-3=0$

Gọi A là tiếp điểm của tiếp tuyến Δ_1 với (E), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=2 \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$$

Gọi B là tiếp điểm của tiếp tuyến Δ_2 với (E), tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng AB: $2x+5y-10=0$.

Bài 7. Cho hai elip $(E_1):\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và $(E_2):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai elip trên.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $\Delta: Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 0$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E_1) và (E_2) nên:

$$\begin{cases} 5A^2 + 4B^2 = C^2 \\ 4A^2 + 5B^2 = C^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B^2 \\ C^2 = 9B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B; C = \pm 3B \\ A = -B; C = \pm 3B \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng $\Delta: x + y \pm 3 = 0$ hoặc $x - y \pm 3 = 0$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau

a. Tiêu điểm $F_1(-7;0)$ và đi qua điểm $M(-2;12)$

b. Đi qua điểm $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip và F_1 có hoành độ âm

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau

a. Tiêu cự bằng 8 và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$

b. Một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều, chu vi hình chữ nhật cơ sở là $12\left(2+\sqrt{3}\right)$

c. Độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm thuộc một đường tròn.

Bài 3. Cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (E) song song với đường thẳng $d: x + \sqrt{2}y - 1 = 0$

Bài 4. Cho elip $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (E), biết d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho AO = 2BO.

Bài 5. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm M(1; –3). Viết các đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (E). Gọi A, B lần lượt là các tiếp điểm, viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 6. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Bài 7. Cho elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho tiếp tuyến với (E) tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B và diện tích tam giác OAB nhỏ nhất

Bài 8. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và hai điểm $M(-4;m), N(4;n)$ với $m \neq n$. Gọi $A_1(-4;0), A_2(4;0)$

a. Viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M, tìm giao điểm I của chúng

b. Biết đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn cắt elip (E) tại một điểm duy nhất. Tìm tập hợp các giao điểm I

Bài 9. Cho hai elip $(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai elip trên.

Bài 10. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và đường thẳng d: y = 2. Viết phương trình tiếp tuyến với (E), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 60^0.

Hướng dẫn giải

Bài 1. a. Phương trình chính tắc của elip: $(E): \frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{147} = 1$

b. Phương trình chính tắc của elip: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = b^2 + c^2$ và a, b, c > 0

Tiêu điểm: $F_1(-c;0); F_2(c;0) \Rightarrow \overrightarrow{F_1M} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}} + c; \frac{4}{\sqrt{5}}\right); \overrightarrow{F_2M} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - c; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Ta có tam giác MF_1F_2 vuông tại M nên $\overrightarrow{F_1M} \perp \overrightarrow{F_2M} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow c^2 = 5$ và $M \in (E)$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ \frac{9}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + 5 \\ b^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của elip: $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Bài 2. a. Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b. Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$ và a, b, $c>0$

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là $2(2a+2b)=12\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow a+b=3\left(2+\sqrt{3}\right)$

Gọi B(0; b) là một đỉnh của (E) và ΔBF_1F_2 cân tại B nên ΔBF_1F_2 đều thì $BF_1=F_1F_2$

Ta có: $F_1(-c;0)\Rightarrow \overrightarrow{F_1B}=(c;b)\Rightarrow F_1B=\sqrt{c^2+b^2}=F_1F_2=2c\Leftrightarrow b^2=3c^2$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=3\left(2+\sqrt{3}\right) \\ b^2=3c^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=3\left(2+\sqrt{3}\right) \\ 4b^2-3a^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=3\left(2+\sqrt{3}\right) \\ \left(2b-\sqrt{3}a\right)\left(2b+\sqrt{3}a\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=3\left(2+\sqrt{3}\right) \\ 2b-\sqrt{3}a=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=6 \\ b=3\sqrt{3} \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

c. Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2=b^2+c^2$ và a, b, $c>0$

Độ dài trục lớn $2a=4\sqrt{2}\Leftrightarrow a=2\sqrt{2}$

Các đỉnh trên trục nhỏ: $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$; Các tiêu điểm $F_1(-c;0);F_2(c;0)$ thuộc một đường tròn nên b = c.

Ta có: $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 8=2b^2\Leftrightarrow b^2=4$.

Phương trình chính tắc của elip: $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

Bài 3. Gọi Δ là đường thẳng song song với d nên phương trình $\Delta: x+\sqrt{2}y+C=0$

Δ là tiếp tuyến của (E) nên $8+8=C^2\Leftrightarrow C=\pm4$

Phương trình đường thẳng $\Delta: x+\sqrt{2}y\pm4=0$

Bài 4. Gọi $A(a;0)\in Ox$; $B(0;b)\in Oy$ với $ab\neq0$. Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Đường thẳng AB tiếp xúc với (E) và AO = 2BO nên

$$\begin{cases}\dfrac{64}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\\ OA=2OB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}64b^2+9a^2=a^2b^2\\ a^2=4b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=25\\ a^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\pm5\\ a=\pm10\end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d: $x\pm2y-10=0$ hoặc $x\pm2y+10=0$

Bài 5. Phương trình đường thẳng đi qua M, tiếp xúc với (E) là d_1: x + 2y + 5 = 0 hoặc d_2: 5x – 4y –17 =0

Tọa độ tiếp điểm của d_1 và (E) là $A\left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{8}{5}\right)$ và d_2 và (E) là $B\left(\dfrac{45}{17};-\dfrac{16}{17}\right)$

Phương trình đường thẳng AB: 4x – 27y – 36 = 0

Bài 6. Phương trình đường thẳng d: x + 4y – 5 = 0

Bài 7. Phương trình chính tắc của elip: $(E):\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{1}=1$ và phương trình tiếp tuyến với (E) tại M: $d:\dfrac{xx_0}{3}+\dfrac{yy_0}{1}=1\Leftrightarrow xx_0+3yy_0-3=0$ cắt Ox, Oy tại $A\left(\dfrac{3}{x_0};0\right)$; $B\left(0;\dfrac{1}{y_0}\right)$ với $x_0y_0\neq0$

$$dt(\Delta OAB)=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{3}{2|x_0||y_0|}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$1=\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{1}\geq2\sqrt{\frac{x_0^2}{3}.\frac{y_0^2}{1}}\Leftrightarrow1=\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{1}\geq\frac{2|x_0||y_0|}{\sqrt3}\Leftrightarrow\frac{1}{|x_0||y_0|}\geq\frac{2}{\sqrt3}$$

Suy ra: $dt(\Delta OAB)=\dfrac{3}{2|x_0||y_0|}\geq\dfrac{3}{2}.\dfrac{2}{\sqrt3}=\sqrt3\Rightarrow min\left(dt(\Delta OAB)\right)=\sqrt3$

Khi $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{1}=1\\ \dfrac{x_0^2}{3}=y_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2=\dfrac{3}{2}\\ y_0^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2},y_0=\dfrac{1}{\sqrt2};x_0=\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2},y_0=-\dfrac{1}{\sqrt2}\\ x_0=-\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2},y_0=\dfrac{1}{\sqrt2};x_0=-\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2},y_0=-\dfrac{1}{\sqrt2}\end{array}\right.$

Vậy các điểm M là: $\left(\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right);\left(\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2};-\dfrac{1}{\sqrt2}\right);\left(-\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right);\left(-\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2};-\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$

Bài 8.a. Phương trình các đường thẳng A_1N: $nx-8y+4n=0$ và $A_2M: mx+8y-4m=0$

$$I=A_1N\cap A_2M\Rightarrow I\left(\frac{4m-4n}{m+n};\frac{8mn}{m+n}\right)$$

b. Đường thẳng MN: $(n-m)x-8y+4(n+m)=0$ tiếp xúc với (E) nên: $mn=9$

$$\text{Ta có: } I=(x;y)\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4m-4n}{m+n}\\ y=\dfrac{8mn}{m+n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\dfrac{m-n}{m+n}\\ y=\dfrac{72}{m+n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\dfrac{m-n}{m+n}\\ \dfrac{y}{12}=\dfrac{6}{m+n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}=\dfrac{(m-n)^2}{(m+n)^2}=\dfrac{m^2+n^2-2mn}{(m+n)^2}\\ \dfrac{y^2}{144}=\dfrac{36}{(m+n)^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{144}=\frac{m^2+n^2-18}{(m+n)^2}+\frac{36}{(m+n)^2}=\frac{m^2+n^2+18}{(m+n)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{144}=\frac{m^2+n^2+2nm}{(m+n)^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{144}=1$$

Tập hợp các giao điểm I là elip: $(E_1):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{144}=1$

Bài 9. Tiếp tuyến chung của hai elip: $x+y\pm\sqrt{13}=0$ hoặc $x-y\pm\sqrt{13}=0$

Bài 10. Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $\Delta: Ax+By+C=0$, $A^2+B^2>0$

Góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d: y = 2 là 60^0 nên

$$\cos60^0=\frac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\vec{j}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\vec{j}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}\Leftrightarrow A^2=3B^2\Leftrightarrow A=\pm\sqrt{3}B$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) nên:

$4A^2+B^2=C^2\Leftrightarrow C^2=13B^2\Leftrightarrow C=\pm\sqrt{13}B$

Phương trình đường thẳng $\Delta:\sqrt{3}x\pm y+\sqrt{13}=0$

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến elip (Tìm tọa độ điểm, chứng minh, tính độ dài)

Bài 1.(D–2005) Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $C(2;0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng A, B đối xứng qua trục hoành và tam giác ABC đều.

Giải

Gọi $A(x;y) \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và $\begin{cases} -2 < x < 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$. Điểm B thuộc (E) và đối xứng với A qua trục hoành nên $B(x;-y)$ và $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Ta có ΔABC luôn cân tại đỉnh C nên ΔABC đều khi CA = AB

$\overrightarrow{CA} = (x-2;y) \Rightarrow CA^2 = (x-2)^2 + y^2$ và $\overrightarrow{AB} = (0;-2y) \Rightarrow AB^2 = 4y^2$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4y^2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{(x-2)^2}{3} \\ 7x^2 - 16x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

Vậy, tọa độ các điểm A, B là: $\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right);\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 2.(B–2010) Cho elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ và điểm $A(2;\sqrt{3})$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Giải

Ta có elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$, tiêu điểm $F_1(-1; 0)$ và $F_2(1; 0)$

Phương trình đường thẳng AF_1: $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$. Giao điểm của đường thẳng AF_1 với (E) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y - 1 \\ 9y^2 - 4\sqrt{3}y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{2\sqrt{3}}{3}; x = 1 \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}; x = -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Điểm M có tung độ dương nên $M\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

N là điểm đối xứng của F₂ qua M nên $N\left(1;\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\overrightarrow{AF_2}=\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ nên

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AF_2}=(-1)(-1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\sqrt{3}\right)=1-1=0\Rightarrow\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AF_2}$$

Suy ra ΔANF_2 vuông tại A. Đường tròn ngoại tiếp ΔANF_2 có tâm M là trung điểm NF_2 và bán kính $R=MF_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Phương trình đường tròn: $(x-1)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$

Bài 3. Cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm).

a. Tìm tọa độ điểm $M\in(E)$ sao cho $MF_1=4MF_2$.

b. Gọi A, B là hai điểm bất kỳ thuộc (E) sao cho $AF_1+BF_2=8$. Tính AF_2+BF_1

Giải

Ta có elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ nên

$$\begin{cases}a^2=25\\b^2=16\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2-b^2=9\Rightarrow a=5;b=4;c=3$$

a. Gọi $M(x;y)\equiv(E)$ thì $MF_1=5+\frac{3}{5}x$ và $MF_2=5-\frac{3}{5}x$ với $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$

Ta có: $MF_1=4MF_2\Leftrightarrow 5+\frac{3}{5}x=4\left(5-\frac{3}{5}x\right)\Leftrightarrow x=5$, $\frac{5^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Leftrightarrow y=0$

nên M(5; 0)

b. Gọi $A(x_1;y_1)\in(E)$ thì $AF_1=5+\frac{3}{5}x_1$ và $AF_2=5-\frac{3}{5}x_1$

$B(x_2;y_2)\in(E)$ thì $BF_1=5+\frac{3}{5}x_2$ và $BF_2=5-\frac{3}{5}x_2$

Ta có: $AF_1+BF_2=8\Leftrightarrow 5+\frac{3}{5}x_1+5-\frac{3}{5}x_2=8\Leftrightarrow x_1-x_2=-\frac{10}{3}$

$$AF_2+BF_1=5-\frac{3}{5}x_1+5+\frac{3}{5}x_2=10-\frac{3}{5}(x_1-x_2)=10-\frac{3}{5}\left(-\frac{10}{3}\right)=12$$

Bài 4. Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm) và điểm $M\in(E)$.

a. Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ M đến F_2 và đến đường thẳng $x=\frac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

b. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1, F_2 đến một tiếp tuyến bất kỳ của (E) là một hằng số.

Giải

Ta có elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ nên $F_2\left(2\sqrt{3};0\right)$ và gọi

$M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1$

a. $MF_2=4-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0=\frac{1}{2}\left(8-\sqrt{3}x_0\right)$ và $d(M,d)=\left|x_0-\frac{8}{\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|8-\sqrt{3}x_0\right|$

$$\frac{MF_2}{d(M,d)}=\frac{\frac{1}{2}\left(8-\sqrt{3}x_0\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left|8-\sqrt{3}x_0\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b. Tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{3};0)$, $F_2(2\sqrt{3};0)$, gọi

$M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1\Leftrightarrow 4x_0^2+16y_0^2=64$

Phương trình tiếp tuyến d với (E) tại M: $\frac{xx_0}{16}+\frac{yy_0}{4}=1\Leftrightarrow xx_0-4yy_0-16=0$

$d_1=d(F_1,d)=\frac{\left|-2\sqrt{3}x_0-16\right|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{2\left|\sqrt{3}x_0+8\right|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}$ và

$d_2=d(F_2,d)=\frac{\left|2\sqrt{3}x_0-16\right|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{2\left|\sqrt{3}x_0-8\right|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}$

$$d_1d_2=\frac{2\left|\sqrt{3}x_0+8\right|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}.\frac{2\left|\sqrt{3}x_0-8\right|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{4\left|3x_0^2-64\right|}{x_0^2+16y_0^2}$$

$$=\frac{4\left|3x_0^2-4x_0^2-16y_0^2\right|}{x_0^2+16y_0^2}=\frac{4\left|x_0^2+16y_0^2\right|}{x_0^2+16y_0^2}=4$$

Bài 5. (D–2002) Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ các điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Gọi $M(m;0)\in Ox$, $N(0;n)\in Oy$ với m > 4 và n > 2

Phương trình đường thẳng MN: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1\Leftrightarrow nx+my-mn=0$

Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E) khi

$16n^2+9m^2=m^2n^2\Leftrightarrow\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}=1$

Ta có: $MN^2=m^2+n^2=\left(m^2+n^2\right)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)=25+\frac{16n^2}{m^2}+\frac{9m^2}{n^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $\frac{16n^2}{m^2}+\frac{9m^2}{n^2}\geq2\sqrt{\frac{16n^2}{m^2}.\frac{9m^2}{n^2}}=24$ nên

$MN^2\geq25+24=49\Leftrightarrow MN\geq7\Rightarrow\min(MN)=7$

khi $\frac{16n^2}{m^2}=\frac{9m^2}{n^2}\Leftrightarrow16n^4=9m^4\Leftrightarrow4n^2=3m^2$

Ta có: $\begin{cases}4n^2=3m^2\\16n^2+9m^2=m^2n^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2=\frac{3m^2}{4}\\m^2\left(m^2-28\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n^2=21\\m^2=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=\sqrt{21}\\m=2\sqrt{7}\end{cases}$

do m > 4 và n > 2

Vậy $M\left(2\sqrt{7};0\right)$; $N\left(0;\sqrt{21}\right)$

Bài tập đề nghị

Bài 1. a. Tìm điểm M thuộc elip $(E):\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ sao cho góc tạo bởi hai đường thẳng MF_1, MF_2 bằng 90^0, biết F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E).

b. Tìm điểm M thuộc elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}=120^0$, biết F$_1$ và F$_2$ là hai tiêu điểm của (E).

Bài 2. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Tìm điểm M $\in$(E) sao cho tiếp tuyến với (E) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Bài 3. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d_m: x-y+2m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d$_m$ có duy nhất một điểm mà từ đó kẻ đến (E) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 90^0

Bài 4. Cho elip $(E): \frac{x^2}{3}+y^2=1$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông ngoại tiếp elip.

Bài 5. Cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0), F_2(\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Viết phương trình chính tắc của (E) và tính biểu thức: $P=F_1M^2+F_2M^2-3OM^2-F_1M.F_2M$

Bài 6. Cho elip $(E): 4x^2+8y^2-32=0$ và đường thẳng $d: x-\sqrt{2}y+2=0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm B và C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất

Bài 7. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Gọi F$_1$, F$_2$ là các tiêu điểm của (E) (F$_1$ có hoành độ âm) và điểm M $\in$(E). Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (E) tại M. Tìm tọa độ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ hai tiêu điểm F$_1$, F$_2$ đến đường thẳng Δ là nhỏ nhất.

Bài 8. Cho hai elip $(E_1): \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ và $(E_2): \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$. Chứng minh rằng hai elip trên cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

Bài 9. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng d: 2x – y + 1 =0. Tìm các điểm M thuộc đường thẳng d để từ M kẻ đến (E) hai tiếp tuyến tạo với nhau một góc vuông.

Hướng dẫn giải

Bài 1a. Tiêu điểm của (E) là $F_1(-2;0); F_2(2;0)$ và MF$_1$ $\perp$ MF$_2$ nên M thuộc đường tròn, đường kính F$_1$F$_2$. Phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2=4$

Mặt khác M thuộc elip $(E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ nên tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Tọa độ các điểm M là $(\sqrt{3};1);(-\sqrt{3};1);(\sqrt{3};-1);(-\sqrt{3};-1)$

b. Tiêu điểm của (E) là $F_1(-5\sqrt{3};0); F_2(5\sqrt{3};0)$ và $M(x,y) \in (E)$ nên $MF_1 = 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $MF_2 = 10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Xét tam giác MF$_1F_2$, áp dụng định lý Côsin: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1MF_2\cos\widehat{F_1MF_2}$

$$\Leftrightarrow 300 = \left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \Leftrightarrow x = 0$$

nên $y^2 = 25$

Tọa độ các điểm M là (0; 5); (0; −5)

Bài 2. Tọa độ các điểm M là

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right);\left(\frac{3}{\sqrt{2}};-\sqrt{2}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-\sqrt{2}\right)$$

Bài 3. Gọi $M(x_0;y_0)$ mà từ đó kẻ đến (E) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 90^0 nên hai đường thẳng đi qua M, vuông góc với nhau có dạng: $d_1: y = kx - kx_0 + y_0$ và $d_2: y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}x_0 + y_0$

d$_1$, d$_2$ tiếp xúc với (E) thì:

$$\begin{cases} 16k^2 + 9 = (-kx_0 + y_0)^2 \\ \frac{16}{k^2} + 9 = \left(\frac{1}{k}x_0 + y_0\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k^2 + 9 = (y_0 - kx_0)^2 \\ 16 + 9k^2 = (x_0 + ky_0)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16k^2 + 9 = y_0^2 - 2ky_0x_0 + k^2x_0^2 \\ 16 + 9k^2 = x_0^2 + 2ky_0x_0 + k^2y_0^2 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 25$$

Suy ra M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 25$

M là điểm duy nhất thuộc đường thẳng d$_m$ nên đường thẳng d$_m$ tiếp xúc với đường tròn (C) tại M

$$\Rightarrow d\left(O,d_m\right)=\frac{|2m|}{\sqrt{2}}=5\Leftrightarrow m=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Bài 4. Gọi hình vuông ABCD ngoại tiếp elip $(E):\frac{x^2}{3}+y^2=1$, khi đó:

$AB\perp BC$, AB và BC tiếp xúc với elip, $d\left(O,AB\right)=d\left(O,BC\right)$.

Ta có AB không thể song song với Oy nên phương trình có dạng: $kx-y+a=0$ với $k\neq 0$

Từ $AB\perp BC$ nên đường thẳng BC có phương trình dạng: $x+ky-bk=0$

Suy ra: $\begin{cases}3k^2+1=a^2\\3+k^2=b^2k^2\\\frac{|a|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|bk|}{\sqrt{1+k^2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3k^2+1=a^2\\3+k^2=b^2k^2\\a^2=b^2k^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^2=1\\a^2=b^2=4\end{cases}$

- Với k = 1, phương trình các đường thẳng AB: $x-y+2=0$, CD: $x-y-2=0$
- Với k = −1, phương trình các đường thẳng BC: $x+y-2=0$, AD: $x+y+2=0$

Bài 5. Phương trình chính tắc của elip $(E):\frac{x^2}{4}+y^2=1$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(E)\Rightarrow\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ và $F_1M=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$, $F_2M=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$

$$P=F_1M^2+F_2M^2-3OM^2-F_1M.F_2M$$

$$=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2-3\left(x_0^2+y_0^2\right)-\left(4-\frac{3}{4}x_0^2\right)$$

$$=4-3\left(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2\right)=4-3=1$$

Bài 6. Phương trình chính tắc của $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

Gọi Δ là đường thẳng song song với d thì phương trình đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{2}y+C=0$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) nên $8+8=C^2\Leftrightarrow C=\pm 4$

Phương trình đường thẳng $\Delta_1: x-\sqrt{2}y+4=0$ và đường thẳng $\Delta_2: x-\sqrt{2}y-4=0$

Gọi $h_1 = d(\Delta_1, d) = \begin{cases} M(-4;0)\in\Delta_1 \\ d(M,d) \end{cases} = \dfrac{|-4+2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$h_2 = d(\Delta_2, d) = \begin{cases} M(4;0)\in\Delta_2 \\ d(M,d) \end{cases} = \dfrac{|4+2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ thì $h_2 > h_1$

$dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}h.BC$ với $h = d(A,d) \le h_2, \forall A \in (E)$ và CB không đổi nên $max(dt(\Delta ABC)) = \dfrac{1}{2}h_2.BC$ khi A là tiếp điểm của đường thẳng $\Delta_2: x-\sqrt{2}y-4=0$ với (E)

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}y-4=0 \\ 4x^2+8y^2-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}y+4 \\ y^2+2\sqrt{2}y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \text{ nên } A\left(2;-\sqrt{2}\right)$$

Bài 7. Các tiêu điểm của elip $F_1(-4;0); F_2(4;0)$ và gọi $M(x_0;y_0)\in(E)$

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$$

Tiếp tuyến Δ với (E) tại M: $\dfrac{xx_0}{25}+\dfrac{yy_0}{9}=1 \Leftrightarrow 9xx_0+25yy_0-225=0$

$$d_1 = d(F_1,\Delta) = \frac{|-36x_0-225|}{\sqrt{81x_0^2+625y_0^2}} = \frac{9|4x_0+25|}{\sqrt{81x_0^2+625y_0^2}}$$

$$d_2 = d(F_2,\Delta) = \frac{|36x_0-225|}{\sqrt{81x_0^2+625y_0^2}} = \frac{9|4x_0-25|}{\sqrt{81x_0^2+625y_0^2}}$$

Ta có:

$$d_1d_2 = \frac{9|4x_0+25|}{\sqrt{81x_0^2+625y_0^2}}.\frac{9|4x_0-25|}{\sqrt{81x_0^2+625y_0^2}} = \frac{81|16x_0^2-625|}{81x_0^2+625y_0^2}$$

$$= \frac{81|625-16x_0^2|}{9\left(625-16x_0^2\right)} = 9$$

Do $0 \le x_0^2 \le 25 \Leftrightarrow 0 \le 16x_0^2 \le 400 < 625 \Rightarrow 625-16x_0^2 > 0$

$d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} \Leftrightarrow d_1 + d_2 \geq 6 \Rightarrow \min(d_1 + d_2) = 6$

khi $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \dfrac{9|4x_0 + 25|}{\sqrt{81x_0^2 + 625y_0^2}} = \dfrac{9|4x_0 - 25|}{\sqrt{81x_0^2 + 625y_0^2}} \Leftrightarrow x_0 = 0; y_0 = \pm 3$

Tọa độ điểm M là (0; 3) hoặc (0; −3)

Bài 8. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra (E_1), (E_2) cắt nhau tại bốn điểm

$A(\sqrt{2}; \sqrt{2}); B(-\sqrt{2}; \sqrt{2}); C(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}); D(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6y^2 = 18 \\ 6x^2 + 3y^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

là phương trình đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Bài 9. Gọi $M(x_0; y_0)$ mà từ đó kẻ đến (E) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 90^0 nên hai đường thẳng đi qua M, vuông góc với nhau có dạng: $d_1 : y = k\text{x} - \text{k}x_0 + y_0$ và $d_2 : y = -\dfrac{1}{k}\text{x} + \dfrac{1}{k}x_0 + y_0$

d_1, d_2 tiếp xúc với (E) thì:

$$\begin{cases} 25k^2 + 4 = (-k\text{x}_0 + y_0)^2 \\ \dfrac{25}{k^2} + 4 = \left(\dfrac{1}{k}\text{x}_0 + y_0\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25k^2 + 4 = (y_0 - k\text{x}_0)^2 \\ 25 + 4k^2 = (\text{x}_0 + ky_0)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25k^2 + 4 = y_0^2 - 2ky_0\text{x}_0 + k^2\text{x}_0^2 \\ 25 + 4k^2 = x_0^2 + 2ky_0\text{x}_0 + k^2\text{y}_0^2 \end{cases} \Rightarrow \text{x}_0^2 + \text{y}_0^2 = 29$$

Suy ra M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 29$

M thuộc đường thẳng d nên M là giao điểm của (C) với d tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x^2 + 4x - 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 5 \\ x = -\dfrac{14}{5}; y = -\dfrac{23}{5} \end{array}\right.$$

Vậy $M_1(2; 5); M_2\left(-\dfrac{14}{5}; -\dfrac{23}{5}\right)$

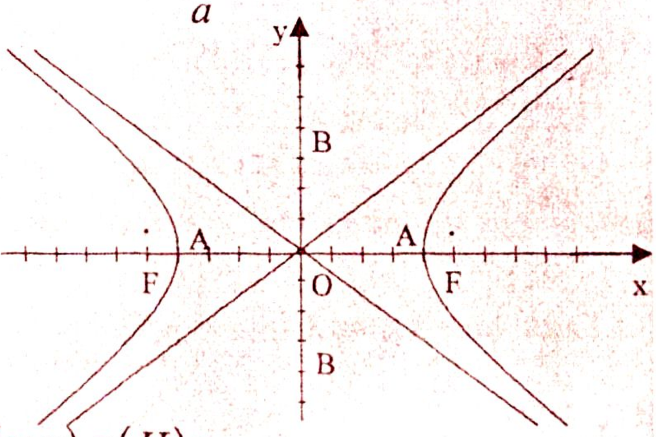
§6. HYPEBOL

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình chính tắc: $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $c^2 = a^2 + b^2$ và a, b, c > 0

– Các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c$

– Độ dài trục thực 2a, trục ảo 2b, tâm sai $e = \frac{c}{a} > 1$



– Đường tiệm cận: $y = \pm\frac{b}{a}x$

– Đường chuẩn $x = \pm\frac{a}{e}$

– Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở: $x = \pm a$; $y = \pm b$

– Bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y) \in (H)$:

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| \text{ và } MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$$

– Hai đỉnh: $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$

2. Điều kiện tiếp xúc

Xét hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $c^2 = a^2 + b^2$, đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ và điểm $M(x_0;y_0) \in (H)$

– Đường thẳng tiếp xúc hypebol tại $M(x_0;y_0) \in (H)$ (gọi là tiếp tuyến của (H)) có phương trình $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

– Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với (H) là: $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình chính tắc của hypebol

Phương pháp:

1. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $c^2 = a^2 + b^2$ và a, b, c > 0

2. Từ các yếu tố đã cho đi xác định a, b

Bài tập mẫu

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a. Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

b. Đi qua hai điểm $M(6;-1)$ và $N\left(-8;2\sqrt{2}\right)$

Giải

a. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $c^2=a^2+b^2$ và a, b, $c>0$

Hình chữ nhật cơ sở có chu vi: $2(2a+2b)=20 \Leftrightarrow a+b=5$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow c=\frac{a\sqrt{13}}{3} \Rightarrow c^2=\frac{13a^2}{9}=a^2+b^2 \Leftrightarrow \frac{4a^2}{9}-b^2=0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=5 \\ \frac{4a^2}{9}-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5-a \\ a^2-18a+45=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3;b=2 \\ a=15;b=-10 \end{array}\right.$

Do b > 0 nên b = −10 (loại).

Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

b. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $c^2=a^2+b^2$ và a, b, c >0

Ta có: $M,N\in(H) \Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{64}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}=\frac{1}{32} \\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=32 \\ b^2=8 \end{cases}$

Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a. Tiêu điểm $F_1(-5;0)$ và phương trình hai đường tiệm cận $y=\pm\frac{4x}{3}$

b. Đi qua điểm $M(6;3)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0

Giải

a. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $c^2=a^2+b^2$ và a, b, $c>0$

Tiêu điểm $F_1(-5;0)$ nên $c = 5$ và phương trình hai đường tiệm cận $y = \pm\frac{4x}{3}$ nên $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

Ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $c^2 = a^2 + b^2$ và a, b, $c > 0$

Phương trình hai đường tiệm cận: $y = \pm\frac{b}{a}x$ nên $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1 : bx - ay = 0 \\ \Delta_2 : bx + ay = 0 \end{array}\right.$ có các véc tơ pháp tuyến:

$$\overrightarrow{n_1} = (b;-a);\overrightarrow{n_2} = (b;a) \text{ và } \cos60^0 = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left|b^2 - a^2\right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 2\left(b^2 - a^2\right) \quad khi : b^2 \geq a^2 \\ a^2 + b^2 = -2\left(b^2 - a^2\right) \quad khi : b^2 < a^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{array}\right.$$

Mặt khác: $M(6;3) \in (H) \Rightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$

* Xét hệ phương trình: $\begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ \frac{36}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 99 \\ a^2 = 33 \end{cases}$

Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{33} - \frac{y^2}{99} = 1$

* Xét hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ \frac{36}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^3 = 3 \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

Bài 3. Cho hai đường thẳng $d_1: 5x-6y-16=0$ và $d_2: 13x-10y-48=0$. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H), biết hypebol tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2.

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $c^2=a^2+b^2$ và a, b, c > 0

(H) tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases}25a^2-36b^2=256\\169a^2-100b^2=2304\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=16\\b^2=4\end{cases}$$

Phương trình chính tắc của hypebol: $(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng liên quan đến hypebol

Phương pháp:

1. Xét hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $c^2=a^2+b^2$
2. Phương trình tiếp tuyến với hypebol (H) tại $M(x_0;y_0)\in(H)$ là:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

3. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$ với $A^2+B^2>0$ tiếp xúc với (H) là: $A^2a^2-B^2b^2=C^2$

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho hypebol $(H): x^2-\frac{y^2}{8}=1$ và đường thẳng $d_m: x-y-m=0$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (H) (F_1 có hoành độ âm). Tìm giá trị của m để đường thẳng d_m cắt hypebol (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) ($x_M<x_N$) sao cho $F_2N=2F_1M$.

Giải

Ta có: $x-y-m=0\Rightarrow y=x-m$. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d_m và hypebol là:

$$x^2-\frac{(x-m)^2}{8}=1\Leftrightarrow 7x^2+2mx-(m^2+8)=0\ (1)$$

Đường thẳng d_m cắt hypebol (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) ($x_M<x_N$) thì phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

Suy ra: $-\left(8+m^2\right)<0 \Leftrightarrow 8+m^2>0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = x_M \leq -1 < 1 \leq x_2 = x_N$

Ta có: $MF_1 = \left|a+\frac{c}{a}x_1\right| = \left|1+3x_1\right| = -1-3x_1$ (do $x_1 = x_M \leq -1$)

$NF_2 = \left|a-\frac{c}{a}x_2\right| = \left|1-3x_2\right| = -1+3x_2$ (do $x_N = x_2 \geq 1$)

Ta có: $F_2N = 2F_1M \Leftrightarrow -1+3x_2 = 2\left(-1-3x_1\right) \Leftrightarrow x_2+2x_1 = -\frac{1}{3}$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{2m}{7} \\ x_1.x_2 = \dfrac{-8-m^2}{7} \end{cases}$.

Ta xét $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{2m}{7} \\ x_2+2x_1 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{2m}{7} \\ x_2 = \dfrac{1}{3}-\dfrac{4m}{7} \end{cases}$

$$x_1.x_2 = \frac{8-m^2}{7} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}+\frac{2m}{7}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{4m}{7}\right) = \frac{-8-m^2}{7}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{9}+\frac{2m}{21}+\frac{4m}{21}-\frac{8m^2}{49} = -\frac{8}{7}-\frac{m^2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{49}-\frac{2m}{7}-\frac{65}{63} = 0 \Leftrightarrow 9m^2-126m-455 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21\pm\sqrt{896}}{3}$$

Vậy $m = \dfrac{21\pm\sqrt{896}}{3}$.

Bài 2. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4} = 1$ và các điểm $M(3;-2)$, $N(5;n)$. Viết phương trình các đường thẳng d_1, d_2 qua M và tiếp xúc với (H). Tìm n để trong số các tiếp tuyến của (H) đi qua N có một tiếp tuyến song song với d_1 hoặc d_2.

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua M có phương trình : $Ax+By-3A+2B=0$ với $A^2+B^2>0$. Đường thẳng d tiếp xúc với (H) nên:

$$5A^2-4B^2=\left(3A-2B\right)^2 \Leftrightarrow A^2+2B^2-3AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ A=2B\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng $d_1: \mathrm{x}+y-1=0$ hoặc $d_2: 2\mathrm{x}+y-4=0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N có phương trình : $A\mathrm{x}+By-5A-Bn=0$ với $A^2+B^2>0$. Đường thẳng d tiếp xúc với (H) nên:

$$5A^2-4B^2=\left(-5A-Bn\right)^2 \Leftrightarrow 20A^2+B^2\left(n^2+4\right)+10ABn=0 \ (1)$$

* Trường hợp 1: Khi Δ song song với đường thẳng d_1 thì $\begin{cases}A=B\\ 4A+Bn\neq 0\end{cases}$

nên từ (1) ta có:

$$\begin{cases}20A^2+A^2\left(n^2+4\right)+10A^2n=0\\ A\left(1+4n\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n^2+10n+24=0\\ 1+4n\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}n=-4\\ n=-6\end{array}\right.$$

* Trường hợp 2: Khi Δ song song với đường thẳng d_2 nên

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{1}\neq\frac{5A+Bn}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2B\\ 3A+Bn\neq 0\end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$$\begin{cases}80B^2+B^2\left(n^2+4\right)+20B^2n=0\\ B\left(6+n\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n^2+20n+84=0\\ 6+n\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow n=-14\pm\sqrt{19}$$

* Kết luận: $n\in\left\{-4;-6;-14\right\}$

Bài 3. Cho hypebol $\left(H\right): \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (H), biết d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho AO = 2BO

Giải

Gọi $A\left(a;0\right)\in \mathrm{Ox}$; $B\left(0;b\right)\in Oy$ với $ab\neq 0$.

Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Đường thẳng AB tiếp xúc với (H) và AO = 2BO nên

$$\begin{cases}\frac{64}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\\ OA=2OB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}64b^2-9a^2=a^2b^2\\ a^2=4b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=7\\ a^2=28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\pm\sqrt{7}\\ a=\pm 2\sqrt{7}\end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d: $x+2y\pm 2\sqrt{7}=0$ hoặc $x-2y\pm 2\sqrt{7}=0$

Bài 4. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ và điểm M(3; −2).Gọi A, B là các tiếp điểm của các đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (H).Viết phương trình đường thẳng AB

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua M có phương trình: $Ax+By-3A+2B=0$ với $A^2+B^2>0$.

Đường thẳng d tiếp xúc với (H) nên:

$$5A^2-4B^2=(3A-2B)^2 \Leftrightarrow A^2+2B^2-3AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=2B \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ hoặc $d_2: 2x+y-4=0$

A là tiếp điểm của d_1 với (H) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ \frac{x^2}{5}-\frac{(1-x)^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-10x+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4 \\ x=5 \end{cases}$$

B là tiếp điểm của d_2 với (H) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+4 \\ \frac{x^2}{5}-\frac{(4-2x)^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+4 \\ 4x^2-20x+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng AB:6x + 5y − 10 = 0

Bài 5. Cho hai hypebol $(H_1): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ và $(H_2): \frac{x^2}{6}-y^2=1$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai hypebol trên.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$, $A^2+B^2>0$.Đường thẳng Δ tiếp xúc với (H_1) và (H_2) nên:

$$\begin{cases} 9A^2-4B^2=C^2 \\ 6A^2-B^2=C^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2=B^2 \\ C^2=5B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B; C=\pm\sqrt{5}B \\ A=-B; C=\pm\sqrt{5}B \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng $\Delta: x+y\pm\sqrt{5}=0$ hoặc $x-y\pm\sqrt{5}=0$

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến hypebol (Tìm tọa độ điểm, chứng minh, tính độ dài)

Bài 1. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $C(4;0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (H), biết rằng A, B đối xứng qua trục hoành và tam giác ABC vuông cân.

Giải

Gọi $A(x;y) \in (H) \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ và $\begin{cases} x \le -4 \vee x \ge 4 \\ y \le -3 \vee y \ge 3 \end{cases}$. Điểm B thuộc (H) và đối xứng với A qua trục hoành nên $B(x;-y)$

Ta có ΔABC luôn cân tại đỉnh C nên ΔABC vuông cân khi $CA \perp CB$

$\overrightarrow{CA} = (x-4;y)$ và $\overrightarrow{CB} = (x-4;-y)$. Từ

$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 - y^2 = 0$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-4)^2 - y^2 = 0 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = (x-4)^2 \\ 7x^2 - 128x + 400 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{100}{7}; y = \pm\frac{72}{7}$$

Vậy, tọa độ các điểm A, B là: $\left(\frac{100}{7};\frac{72}{7}\right);\left(\frac{100}{7};-\frac{72}{7}\right)$

Bài 2. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ và điểm $A\left(-\frac{5}{3};\frac{11\sqrt{2}}{3}\right)$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (H) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ âm của đường thẳng AF_2 với (H); N là điểm đối xứng của M qua F_1. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Giải

Ta có hypebol $(H): \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ nên $c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4$, tiêu điểm $F_1(-2;\ 0)$ và $F_2(2;\ 0)$

Phương trình đường thẳng AF_2: $\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{2} = 0$. Giao điểm của đường thẳng AF_2 với (H) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y - 2\sqrt{2} = 0 \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2} - y}{\sqrt{2}} \\ 5y^2 + 4\sqrt{2}y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2}; x = 3 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{5}; x = \frac{9}{5} \end{array}\right.$$

Điểm M có tung độ âm nên $M(3;-\sqrt{2})$.

N là điểm đối xứng của M qua F_1 nên $N\left(-7;\sqrt{2}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{16}{3};-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{14}{3};-\frac{14\sqrt{2}}{3}\right)$

nên $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{16}{3}\right)\frac{14}{3}+\frac{8\sqrt{2}}{3}.\frac{14\sqrt{2}}{3}=0\Rightarrow\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$

Suy ra ΔANM vuông tại A. Đường tròn ngoại tiếp ΔANM có tâm F_1 là trung điểm NM và bán kính $R=MF_1=\sqrt{27}$. Phương trình đường tròn: $(x+2)^2+y^2=27$

Bài 3. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và điểm $M(x_o;y_o)\in(H)$.

a) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của (H) là một số không đổi.

b) Tiếp tuyến với (H) tại M cắt hai đường tiệm cận tại A và B. Chứng minh MA = MB và diện tích tam giác OAB là một số không đổi.

Giải

a. Phương trình các đường tiệm cận của (H) là:

Δ_1: $bx+ay=0$ và Δ_2: $bx-ay=0$

Khoảng cách từ M đến Δ_1 và Δ_2 là:

$$d_1=d(M,\Delta_1)=\frac{|bx_o+ay_o|}{\sqrt{a^2+b^2}};\ d_2=d(M,\Delta_2)=\frac{|bx_o-ay_o|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$M(x_o;y_o)\in(H)$ nên: $\frac{x_o^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_o^{\ 2}}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2x_o^{\ 2}-a^2y_o^{\ 2}=a^2b^2$

$$d_1.d_2=\frac{|bx_o+ay_o|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|bx_o-ay_o|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x_o^{\ 2}-a^2y_o^{\ 2}|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow d_1.d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

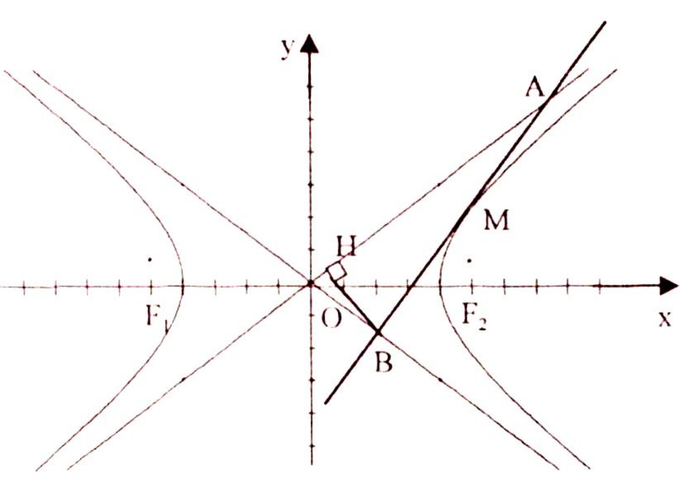
b. Phương trình tiếp tuyến Δ với (H) tại M là:

$$\frac{xx_o}{a^2}-\frac{yy_o}{b^2}=1$$

$\Rightarrow\Delta$: $b^2x_ox-a^2y_oy-a^2b^2=0$

Khi đó:

$\{A\}=\Delta\cap\Delta_1$ có tọa độ là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{a^2b}{bx_0 + ay_0} \\ y_A = \dfrac{-ab^2}{bx_0 + ay_0} \end{cases}$$

$\{B\} = \Delta \cap \Delta_2$ có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{a^2b}{bx_0 - ay_0} \\ y_B = \dfrac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \end{cases}$$

Ta có:

$$x_A + x_B = a^2b\left(\frac{1}{bx_0 + ay_0} + \frac{1}{bx_0 - ay_0}\right) = \frac{a^2b.2bx_0}{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2} = \frac{2a^2b^2x_0}{a^2b^2} = 2x_0$$

Tương tự: $y_A + y_B = 2y_0$. Suy ra M là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Rightarrow$ MA = MB

Kẻ $BH \perp \Delta_1$ thì $BH = d(B, \Delta_1) = \dfrac{|bx_B + ay_B|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$BH = \frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\,|bx_0 - ay_0|};\ OA = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_0 + ay_0|}$$

nên $dt(\Delta OAB) = \dfrac{1}{2}BH.OA = ab$

Bài 4. Cho hypebol $(H): \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ và hai đường thẳng $d_1: kx - y = 0$, $d_2: x + ky = 0$. Tìm k để đường thẳng d_1, d_2 lần lượt cắt hypebol tại các điểm A, C và B, D sao cho tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất.

Giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} kx - y = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ (9 - 4k^2)x^2 = 36 \quad (1) \end{cases}$.

Đường thẳng d_1 cắt hypebol tại hai điểm A, C thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Suy ra: $9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < k < \dfrac{3}{2}$ (*).

Khi đó: $\begin{cases} x_A^2 = \dfrac{36}{9-4k^2} \\ y_A^2 = \dfrac{36k^2}{9-4k^2} \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x + ky = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -ky \\ \left(9k^2 - 4\right)y^2 = 36 \quad (2) \end{cases}$.

Đường thẳng d_2 cắt hypebol tại hai điểm B, D thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt. Suy ra: $9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k < -\dfrac{2}{3} \\ k > \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ (**)

Khi đó: $\begin{cases} x_B^2 = \dfrac{36k^2}{9k^2-4} \\ y_B^2 = \dfrac{36}{9k^2-4} \end{cases}$.

Từ (*) và (**) ta có: $-\dfrac{3}{2} < k < -\dfrac{2}{3}$ hoặc $\dfrac{2}{3} < k < \dfrac{3}{2}$ (***)

Ta có: A và C đối xứng qua gốc tọa độ; B và D đối xứng qua gốc tọa độ và $AC \perp BD$ nên tứ giác ABCD là hình thoi.

$$dt\left(ABCD\right) = \frac{1}{2}AC.BD = 2OA.OB = 2\sqrt{x_A^2 + y_A^2}.\sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \frac{72\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(9-4k^2\right)\left(9k^2-4\right)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $9 - 4k^2; 9k^2 - 4$:

$$5\left(1+k^2\right) = 9 - 4k^2 + 9k^2 - 4 \geq 2\sqrt{\left(9-4k^2\right)\left(9k^2-4\right)} \Leftrightarrow \frac{1+k^2}{\sqrt{\left(9-4k^2\right)\left(9k^2-4\right)}} \geq \frac{2}{5}$$

Suy ra:

$$dt\left(ABCD\right) = \frac{72\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(9-4k^2\right)\left(9k^2-4\right)}} \geq 72.\frac{2}{5} = \frac{144}{5} \Rightarrow \min\left(dt\left(ABCD\right)\right) = \frac{144}{5}$$

Khi $9 - 4k^2 = 9k^2 - 4 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$ thỏa mãn (***)

Bài 5. Cho hypebol $\left(H\right): \dfrac{x^2}{5} - y^2 = 1$ và đường thẳng $d_m: x - y + 2m = 0$. Tìm m để trên đường thẳng d_m có duy nhất một điểm mà từ đó kẻ đến (H) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 90^0.

Giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ mà từ đó kẻ đến (H) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 90^0 nên hai đường thẳng đi qua M, vuông góc với nhau có dạng: $d_1: y = kx - kx_0 + y_0$ và $d_2: y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}x_0 + y_0$

d₁, d₂ tiếp xúc với (H) thì: $\begin{cases} 5k^2 - 1 = \left(-kx_0 + y_0\right)^2 \\ \frac{5}{k^2} - 1 = \left(\frac{1}{k}x_0 + y_0\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k^2 - 1 = \left(y_0 - kx_0\right)^2 \\ 5 - k^2 = \left(x_0 + ky_0\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5k^2 - 1 = y_0^2 - 2ky_0x_0 + k^2x_0^2 \\ 5 - k^2 = x_0^2 + 2ky_0x_0 + k^2y_0^2 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 4$$

Suy ra M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$

M là điểm duy nhất thuộc đường thẳng d_m nên đường thẳng d_m tiếp xúc với đường tròn (C) tại M

$$\Rightarrow d\left(O,d_m\right) = \frac{|2m|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau

a. Tâm sai $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 36

b. Đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{34}}{5};\frac{9}{5}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M với F₁, F₂ là hai tiêu điểm của hypebol và F₁ có hoành độ âm

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau

a. Tiêu cự bằng 20 và một đường tiệm cận: $4x + 3y = 0$

b. Độ dài trục thực bằng $4\sqrt{2}$ và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$

Bài 3. Cho hypebol $\left(H\right): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ và đường thẳng $d_m: x - y + m = 0$. Gọi F₁, F₂ là các tiêu điểm của (H) (F₁ có hoành độ âm). Tìm giá trị của m để đường thẳng d_m cắt hypebol (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) ($x_M < x_N$) sao cho $F_2N = F_1M + 3$.

Bài 4. Cho hypebol $\left(H\right): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Viết phương trình d tiếp xúc (H) sao cho d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B và OB = 2OA.

Bài 5. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm M(2; 2).Gọi A, B là các tiếp điểm của các đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (H).Viết phương trình đường thẳng AB

Bài 6. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với (H) sao cho d cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A, B và tam giác OBC cân.

Bài 7. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. Tìm điểm M thuộc $M \in (H)$ sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) nhỏ nhất.

Bài 8. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{14} = 1$ và đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$. Tìm trên đường thẳng d các điểm để từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (H) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Bài 9. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ và hai đường thẳng $d_1: kx - y = 0$, $d_2: x + ky = 0$. Tìm k để đường thẳng d_1, d_2 lần lượt cắt hypebol tại các điểm A, C và B, D sao cho tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất.

Bài 10. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: x - y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt (H) tại hai điểm P, Q và cắt hai đường tiệm cận của (H) tại M, N. Khi đó chứng minh MP = NQ và $\overline{PM}.\overline{PN}$ là một hằng số

Bài 11. Cho hypebol (H): $3x^2 - y^2 = 12$.

a) Tính độ dài phần đường tiệm cận bị chắn bởi 2 đường chuẩn của (H)

b) Tính khoảng cách từ tiêu điểm của (H) đến các đường tiệm cận

c) Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm đến các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn ứng với các tiêu điểm đó.

Bài 12. Cho họ đường cong (C_m): $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 - 25} = 1$ trong đó m là tham số và $m \neq 0$, $m \neq \pm 5$.

a. Tuỳ theo m, hãy xác định khi nào thì (C_m) là elip, khi nào thì (C_m) là hypebol.

b. Giả sử A là một điểm tuỳ ý trên đường thẳng x = 1 và A không thuộc trục hoành. Chứng minh rằng với mỗi điểm A luôn có bốn đường cong của họ đi qua A. Hỏi trong số bốn đường cong đó có bao nhiêu elip và bao nhiêu hypebol.

Hướng dẫn giải

Bài 1. a. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

b. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $c^2=a^2+b^2$ và a, b, c > 0

Tiêu điểm: $F_1(-c;0);F_2(c;0)\Rightarrow \overrightarrow{F_1M}=\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}+c;\frac{9}{5}\right);\overrightarrow{F_2M}=\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}-c;\frac{9}{5}\right)$

Ta có tam giác MF_1F_2 vuông tại M nên $\overrightarrow{F_1M}\perp\overrightarrow{F_2M}\Leftrightarrow\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow c^2=25$ và $M\in(E)$

Suy ra: $\begin{cases}a^2+b^2=25\\ \frac{544}{25a^2}-\frac{81}{25b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=25-a^2\\ a^4-50a^2+544=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=16\\ b^2=9\end{cases}$

Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Bài 2. a. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

b. Phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

Bài 3. Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x-y+m=0\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+m\\ x^2-8mx-4(m^2+5)=0 \quad (1)\end{cases}$

Đường thẳng d_m cắt hypebol (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H)($x_M<x_N$) thì phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

Suy ra: $P=-(m^2+5)<0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó nghiệm của (1) là $x_1=x_M\le -2<2\le x_2=x_N$

Hai tiêu điểm của (H) là $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$

$F_2N=\left|a-\frac{c}{a}x_2\right|=\left|2-\frac{3}{2}x_2\right|=\frac{3}{2}x_2-2$ và

$F_1M=\left|a+\frac{c}{a}x_1\right|=\left|2+\frac{3}{2}x_1\right|=-\frac{3}{2}x_1-2$

Ta có: $F_2N=F_1M+3\Leftrightarrow F_2N-F_1M=3\Leftrightarrow x_1+x_2=2$

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = 8m \Rightarrow 8m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

ài 4. Gọi $A(a;0) \in Ox$; $B(0;b) \in Oy$ với ab ≠ 0. Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Đường thẳng AB tiếp xúc với (H) và OB = 2OA nên

$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \\ OB = 2OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \\ b^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 84 \\ a^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm 2\sqrt{21} \\ a = \pm\sqrt{21} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d: $2x + y \pm 2\sqrt{21} = 0$ hoặc $2x - y \pm 2\sqrt{21} = 0$

ài 5. Phương trình đường thẳng AB:9x – 4y – 18 = 0

ài 6. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A, B. Khi đó Δ OBC vuông tại O

Mặt khác tam giác OBC cân nên Δ OBC vuông cân tại O. Suy ra đường thẳng d vuông góc với đường thẳng y = x hoặc y = –x và O ∉d.

* KHi đường thẳng d vuông góc với đường thẳng y = x, hệ số góc của d là k = – 1

Phương trình đường thẳng d có dạng: $x + y + C = 0$

Đường thẳng d tiếp xúc với (H) nên: $5 - 4 = C^2 \Leftrightarrow C = \pm 1$

Phương trình đường thẳng d : $x + y \pm 1 = 0$

* KHi đường thẳng d vuông góc với đường thẳng y = – x, hệ số góc của d là k = 1

Phương trình đường thẳng d có dạng: $x - y + C = 0$

Đường thẳng d tiếp xúc với (H) nên: $5 - 4 = C^2 \Leftrightarrow C = \pm 1$

Phương trình đường thẳng d : $x - y \pm 1 = 0$

ài 7. Phương trình các đường tiệm cận của (H) là $\Delta_1 : x + \sqrt{3}y = 0$ và $\Delta_2 : x - \sqrt{3}y = 0$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (H) \Rightarrow \frac{x_0^2}{3} - y_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 3y_0^2 = 3$ và

$$d_1 = d(M, \Delta_1) = \frac{\left|x_0 + \sqrt{3}y_0\right|}{2}$$

$d_2 = d(M, \Delta_2) = \frac{\left|x_0 - \sqrt{3}y_0\right|}{2}$ nên $d_1d_2 = \frac{\left|x_0 + \sqrt{3}y_0\right|}{2} . \frac{\left|x_0 - \sqrt{3}y_0\right|}{2} = \frac{\left|x_0^2 - 3y_0^2\right|}{4} = \frac{3}{4}$

$$d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} \Leftrightarrow d_1 + d_2 \geq \sqrt{3} \Rightarrow \min(d_1 + d_2) = \sqrt{3}$$

Khi $\begin{cases} \dfrac{|x_0 + \sqrt{3}y_0|}{2} = \dfrac{|x_0 - \sqrt{3}y_0|}{2} \\ x_0^2 - 3y_0^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + \sqrt{3}y_0 = x_0 - \sqrt{3}y_0 \\ x_0^2 - 3y_0^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Tọa độ điểm M là: $(\sqrt{3};0)$ hoặc $(-\sqrt{3};0)$

Bài 8. Gọi $M(x_0;y_0)$ mà từ đó kẻ đến (H) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau nên hai đường thẳng đi qua M, vuông góc với nhau có dạng: $d_1 : y = kx - kx_0 + y_0$ và $d_2 : y = -\dfrac{1}{k}x + \dfrac{1}{k}x_0 + y_0$

d_1, d_2 tiếp xúc với (H) thì:

$$\begin{cases} 16k^2 - 14 = (-kx_0 + y_0)^2 \\ \dfrac{16}{k^2} - 14 = \left(\dfrac{1}{k}x_0 + y_0\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k^2 - 14 = (y_0 - kx_0)^2 \\ 16 - 14k^2 = (x_0 + ky_0)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16k^2 - 14 = y_0^2 - 2ky_0x_0 + k^2x_0^2 \\ 16 - 14k^2 = x_0^2 + 2ky_0x_0 + k^2y_0^2 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 2.$$

Suy ra M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 2$

Mặt khác M thuộc đường thẳng $d : x + 2y - 3 = 0$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 5y^2 - 12y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = \dfrac{1}{5}; y = \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$$

nên tọa độ M là $(1;1)$ hoặc $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)$

Bài 9. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} kx - y = 0 \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ (25 - 16k^2)x^2 = 400 \quad (1) \end{cases}$.

Đường thẳng d_1 cắt hypebol tại hai điểm A, C thì phương trình (1) có ha nghiệm phân biệt. Suy ra: $25 - 16k^2 > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4} < k < \dfrac{5}{4}$ (*).

Khi đó: $\begin{cases} x_A^2 = \dfrac{400}{25-16k^2} \\ y_A^2 = \dfrac{400k^2}{25-16k^2} \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x + ky = 0 \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -ky \\ \left(25k^2 - 16\right) y^2 = 400 \quad (2) \end{cases}$.

Đường thẳng d_2 cắt hypebol tại hai điểm B, D thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt. Suy ra: $25k^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k < -\dfrac{4}{5} \\ k > \dfrac{4}{5} \end{array}\right.$ (**).

Khi đó: $\begin{cases} x_B^2 = \dfrac{400k^2}{25k^2-16} \\ y_B^2 = \dfrac{400}{25k^2-16} \end{cases}$.

Từ (*) và (**) ta có: $-\dfrac{5}{4} < k < -\dfrac{4}{5}$ hoặc $\dfrac{4}{5} < k < \dfrac{5}{4}$ (***)

Ta có: A và C đối xứng qua gốc tọa độ; B và D đối xứng qua gốc tọa độ và AC ⊥ BD nên tứ giác ABCD là hình thoi.

$$dt(ABCD) = \frac{1}{2} AC.BD = 2OA.OB = 2\sqrt{x_A^2 + y_A^2}.\sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \frac{800\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(25-16k^2\right)\left(25k^2-16\right)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $25 - 16k^2; 25k^2 - 16$:

$$9\left(1+k^2\right) = 25 - 16k^2 + 25k^2 - 16 \geq 2\sqrt{\left(25-16k^2\right)\left(25k^2-16\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+k^2}{\sqrt{\left(25-16k^2\right)\left(25k^2-16\right)}} \geq \frac{2}{9}$$

Suy ra:

$$dt(ABCD) = \frac{800\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(25-16k^2\right)\left(25k^2-16\right)}} \geq 800.\frac{2}{9} = \frac{1600}{9} \Rightarrow \min\left(dt(ABCD)\right) = \frac{1600}{9}$$

Khi $25 - 16k^2 = 25k^2 - 16 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$ thỏa mãn (***)

Bài 10. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x-y+m=0 \\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+m \\ 7x^2+32mx+16m^2+144=0 \quad (1) \end{cases}$

Đường thẳng d cắt (H) tại 2 điểm P, Q khi phương trình (1) có ha nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \Delta' = 144(m^2-7) > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{7}$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1) thì ta có: $P(x_1; x_1+m)$, $Q(x_2; x_2+m)$.

Gọi I là trung điểm của PQ thì:

$x_I = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{-16m}{7}$; $y_I = \dfrac{y_1+y_2}{2} = \dfrac{x_1+x_2}{2}+m = \dfrac{-9m}{7}$;

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

Δ_1: $3x+4y=0$ và Δ_2: $3x-4y=0$.

d cắt Δ_1 tại M có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+m=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\dfrac{4m}{7} \\ y_M = x_M+m = \dfrac{3m}{7} \end{cases}$$

d cắt Δ_2 tại N có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+m=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -4m \\ y_M = x_M+m = -3m \end{cases}$$

Khi đó: $\dfrac{x_M+x_N}{2} = \dfrac{-\dfrac{4m}{7}-4m}{2} = -\dfrac{16m}{7}$; $\dfrac{y_M+y_N}{2} = \dfrac{\dfrac{3m}{7}-3m}{2} = -\dfrac{9m}{7}$

$\Rightarrow$ I cũng là trung điểm của MN. Vậy MP = NQ.

* Ta có: $\overrightarrow{PM} = (x_M - x_1; y_M - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-\dfrac{4m}{7} - x_1; -\dfrac{4m}{7} - x_1)$;

$\overrightarrow{PN} = (x_N - x_1; y_N - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-4m - x_1; -4m - x_1)$;

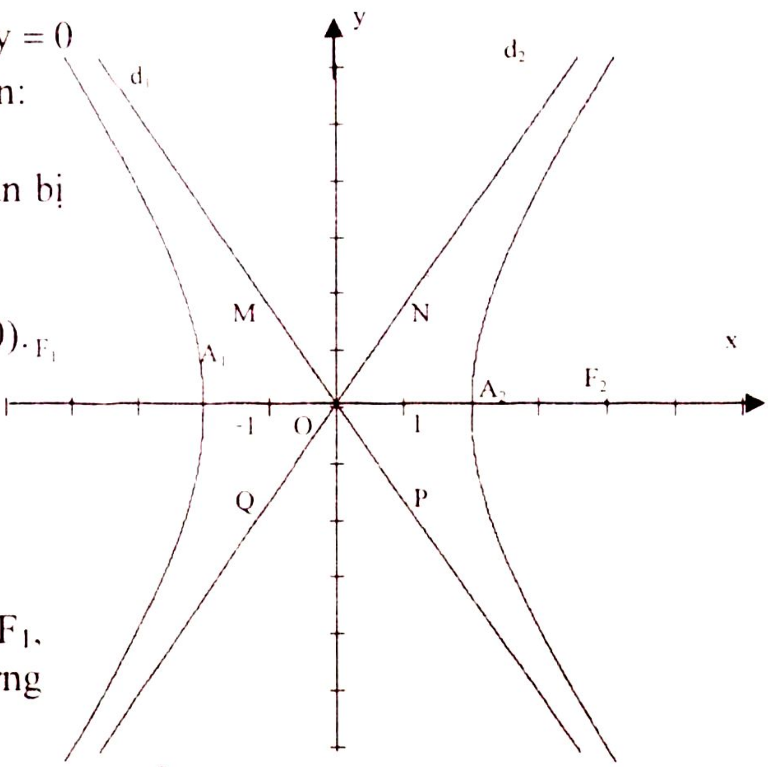
Do P, M, N cùng thuộc Δ nên:

$\overline{PM}.\overline{PN} = \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN} = 2(\dfrac{4m}{7}+x_1)(4m+x_1) = \dfrac{2}{7}(16m^2+32mx_1+7x_1^2)$;

Ta có: $7x_1^2 + 32mx_1 + 16m^2 + 144 = 0 \Rightarrow 16m^2 + 32mx_1 + 7x_1^2 = -144$

$\Rightarrow \overline{PM}.\overline{PN} = \dfrac{2}{7}.(-144) = -\dfrac{288}{7}$

Bài 11. a. Phương trình các đường tiệm cận của (H):



d_1: $\sqrt{3}x + y = 0$; d_2: $\sqrt{3}x - y = 0$

Phương trình 2 đường chuẩn:

$\Delta_1: x + 1 = 0$; $\Delta_2: x - 1 = 0$

Độ dài phần đường tiệm cận bị chắn bởi 2 đường chuẩn:

$MP = NQ = 2MO = 4$.

b. Tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

$d(F_1, d_1) = 2\sqrt{3}$

và $d(F_1, d_2) = 2\sqrt{3}$

$d(F_2, d_1) = 2\sqrt{3}$

và $d(F_2, d_2) = 2\sqrt{3}$.

c. Đường thẳng a đi qua F_1, vuông góc với d_1 có phương trình: $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng a và d_1:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x - \sqrt{3}y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ nên } M(-1;\ \sqrt{3})$$

$\Rightarrow F_1M \perp d_1$ và $M(-1;\ \sqrt{3}) \in \Delta_1$. Tương tự cho các trường hợp còn lại.

Bài 12. Ta có đường cong (C_m): $\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{m^2 - 25} = 1$ với $m \neq 0$, $m \neq \pm 5$.

a. (C_m) là elip khi và chỉ khi $|m| > 5$; (C_m) là hypebol khi và chỉ khi $|m| < 5$ và $m \neq 0$

b. Gọi điểm $A(1;\ a)$ với $a \neq 0$, thay toạ độ của A vào phương trình của (C_m), ta có: $m^4 - m^2(26 + a^2) + 25 = 0$ (1).

Đặt $\begin{cases} X = m^2 \\ X \geq 0 \end{cases}$ thì $X^2 - X(26 + a^2) + 25 = 0$ (2) ta có:

$$\begin{cases} \Delta = (36 + a^2)(16 + a^2) > 0, \forall a \\ S = 26 + a^2 > 0, \forall a; P = 25 \end{cases}$$

Suy ra: (2) có hai nghiệm phân biệt dương nên (1) có 4 nghiệm phân biệt Vậy luôn có 4 đường cong của họ (C_m) đi qua A.

Xét $g(X) = X^2 - X(26 + a^2) + 25$ nên $g(25) = -25a^2 < 0 \forall a \neq 0 \Rightarrow$ (2) có hai nghiệm $0 < X_1 < 25 < X_2$ nên nghiệm của (1):

$m_1 = -\sqrt{X_2}$; $m_2 = -\sqrt{X_1}$; $m_3 = \sqrt{X_1}$ và $m_4 = \sqrt{X_2}$

$m_1 < -5 < m_2 < m_3 < 5 < m_4$

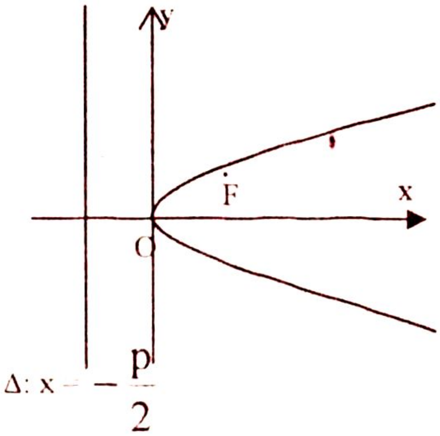
$\Rightarrow$ có hai elip ứng với $m = \pm\sqrt{X_2}$ hai hypebol ứng với $m = \pm\sqrt{X_1}$

§7. PARABOL

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho điểm F cố định và một đường thẳng cố định Δ không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến F bằng khoảng cách từ M đến Δ

$(P)=\{M: MF=d(M,\Delta)\}$



2. Phương trình chính tắc của (P)

$y^2=2px$ với p > 0

3. Các thành phần của (P)

Đỉnh O(0; 0);Tham số tiêu: d(F,Δ) = p

Trục đối xứng: Ox

Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn Δ: $x=-\frac{p}{2}$

4. Điều kiện tiếp xúc

Xét parabol $(P): y^2=2px$ với p > 0, đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$ với $A^2+B^2>0$ và điểm $M(x_0;y_0)\in(P)$

– Đường thẳng tiếp xúc parabol tại $M(x_0;y_0)\in(P)$ (gọi là tiếp tuyến của (P)) có phương trình $yy_0=p(x+x_0)$

– Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với (P) là: $pB^2=2AC$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình chính tắc của parabol

Phương pháp:

1. Phương trình chính tắc của parabol: $(P): y^2=2px$ với p > 0
2. Từ các yếu tố đã cho đi xác định p

Bài tập mẫu

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. Một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1

b. Đi qua điểm $M(1;-1)$

Giải

a. Phương trình chính tắc của Parabol: $y^2 = 2px$ với $p > 0$

Đường thẳng vuông góc với trục Ox có phương trình: $x = a$ với $a > 0$ cắt (P) tại hai điểm $A(a;\sqrt{2pa})$, $B(a;-\sqrt{2pa})$.

Ta có: $\begin{cases} AB = 8 \\ d(O,AB) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2pa} = 8 \\ |a| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 8 \\ a = 1 \end{cases}$.

Phương trình chính tắc: $y^2 = 16x$

b. Phương trình chính tắc của Parabol: $(P): y^2 = 2px$ với $p > 0$

Ta có: $M \in (P) \Rightarrow 1 = 2p \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$. Phương trình chính tắc: $(P): y^2 = x$

Dạng 2. Viết phương trình parabol

Phương pháp:

1. Xét các parabol có phương trình dạng: $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$
2. Tập hợp các Parabol cùng đi qua hai điểm cố định A, B gọi là chùm Parabol và đường thẳng AB gọi là trục của chùm Parabol
3. Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ thuộc đường thẳng $d: y = kx + m$.

   Khi đó phương trình của chùm Parabol đi qua hai điểm A, B có dạng: $y = n(x-x_1)(x-x_2) + kx + m$ với $n \neq 0$

Bài tập mẫu

Bài 1. Viết phương trình parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. Parabol (P) đi qua ba điểm A(1; 5), B(−2; 8) và C(0; 2)

b. Đi qua điểm $A(8;0)$ và có đỉnh $S(6;-12)$

Giải

a. Phương trình đường thẳng AB: $y = -x + 6$. Parabol (P) đi qua hai điểm A(1; 5), B(−2; 8) nên phương trình có dạng: $y = n(x-1)(x+2) - x + 6$ với $n \neq 0$

Mặt khác: $C \in (P)$ nên $2 = n(0-1)(0+2) - 0 + 6 \Leftrightarrow 2 = -2n + 6 \Leftrightarrow n = 2$

Phương trình parabol (P): $y = 2x^2 + x + 2$

Cách khác: Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$

Ta có: $A, B, C \in (P)$ nên $\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$.

Phương trình parabol (P): $y = 2x^2 + x + 2$

b. Parabol (P) có đỉnh $S(6;-12)$ nên phương trình có dạng:

$y = n(x-6)^2 - 12$ với $n \neq 0$

Mặt khác: $A \in (P)$ nên $0 = n(8-6)^2 - 12 \Leftrightarrow 4n - 12 = 0 \Leftrightarrow n = 3$

Phương trình parabol (P): $y = 3x^2 - 36x + 96$

Cách khác: Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có đỉnh

Ta có: $A \in (P)$ và đỉnh $S(6;-12)$ nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 6 \\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = -12 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12a \\ c = 36a - 12 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -36 \\ c = 96 \\ a = 3 \end{cases}$$

Phương trình parabol (P): $y = 3x^2 - 36x + 96$

Bài 2. Viết phương trình parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. Đi qua hai điểm $A(-\sqrt{3};0); B(\sqrt{3};0)$ và tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$

b. Đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: y = -\dfrac{1}{2}$

Giải

a. Phương trình đường thẳng AB: y = 0. Parabol (P) đi qua hai điểm $A(-\sqrt{3};0); B(\sqrt{3};0)$ nên phương trình có dạng:

$y = n(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = n(x^2-3)$ với $n \neq 0$

Parabol (P) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ nên hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 2nx \\ x^3 - 3x = n(x^2-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 2nx \\ (x^2-3)(x-n) = 0 \end{cases} \Rightarrow n = \pm\sqrt{3}$$

Phương trình parabol (P): $y=\pm\sqrt{3}\left(x^2-3\right)$

Cách khác: Gọi phương trình parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ với a ≠ 0

Ta có: $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}3a-b\sqrt{3}+c=0\\3a+b\sqrt{3}+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-3a\\b=0\end{cases}$ nên parabol $(P): y=ax^2-3a$

Parabol (P) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ nên hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}3x^2-3=2ax\\x^3-3x=a\left(x^2-3\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-3=2ax\\\left(x^2-3\right)(x-a)=0\end{cases}\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$$

Phương trình parabol (P): $y=\pm\sqrt{3}\left(x^2-3\right)$

b. Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ và $y'=0\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;y=0\\x=2;y=4\end{array}\right.$ nên các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ là O(0; 0), A(2; 4). Phương trình đường thẳng OA: y = 2x

Parabol (P) đi qua hai điểm $O(0;0); A(2;4)$ nên có phương trình: $y=nx(x-2)+2x$ với n ≠ 0

Parabol (P) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=-\dfrac{1}{2}$ nên hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}2nx-2(n-1)=0\\nx^2-2x(n-1)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{n-1}{n}\\2nx^2-4x(n-1)+1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n^2-5n+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=2\\n=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Phương trình parabol (P): $y=2x^2-2x$ hoặc $y=\dfrac{1}{2}x^2+x$

Cách khác: Gọi phương trình parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ với a ≠ 0

Ta có: $O, A \in (P)$ nên $\begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=2-2a \end{cases}$

nên parabol $(P): y=ax^2+(2-2a)x$

Parabol (P) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}$ nên hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2ax-2(a-1)=0 \\ ax^2-2x(a-1)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a-1}{a} \\ 2ax^2-4x(a-1)+1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a^2-5a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Phương trình parabol (P): $y=2x^2-2x$ hoặc $y=\frac{1}{2}x^2+x$

Bài 3. Viết phương trình parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. Biết tiêu điểm $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$ và đường chuẩn Δ: $y+\frac{1}{4a}=0$ với $a \neq 0$

b. Biết tiêu điểm $F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$ và đường chuẩn $y+\frac{1+b^2-4ac}{4a}=0$ với $a \neq 0$

Giải

a. Ta có: $(P)=\{M: MF=d(M,\Delta)\}$ nên gọi

$M(x;y)\in(P) \Leftrightarrow MF=d(M,\Delta)$

$FM=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4a}\right)^2}$ và $d(M,\Delta)=\left|y+\frac{1}{4a}\right|$ nên

$MF=d(M,\Delta)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4a}\right)^2}=\left|y+\frac{1}{4a}\right| \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{4a}\right)^2=\left(y+\frac{1}{4a}\right)^2 \Leftrightarrow y=ax^2$$

Phương trình parabol (P): $y=ax^2$

b. Ta có: $(P)=\{M: MF=d(M,\Delta)\}$ nên gọi $M(x;y)\in(P) \Leftrightarrow MF=d(M,\Delta)$

$FM = \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1 - b^2 + 4ac}{4a}\right)^2}$ và $d(M, \Delta) = \left| y + \frac{1 + b^2 - 4ac}{4a} \right|$ nên

$$MF = d(M, \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1 - b^2 + 4ac}{4a}\right)^2} = \left| y + \frac{1 + b^2 - 4ac}{4a} \right|$$

$\Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$

Phương trình parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng liên quan đến Parabol

Phương pháp:

1. Xét Parabol có phương trình chính tắc $(P): y^2 = 2px$ với $p > 0$
2. Phương trình tiếp tuyến với Parabol (P) tại $M(x_0; y_0) \in (P)$ là: $yy_0 = p(x + x_0)$
3. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ tiếp xúc với (P) là: $pB^2 = 2AC$
4. Ngoài ra chúng ta có thể dùng phương pháp đạo hàm để viết phương trình tiếp tuyến với Parabol

Bài tập mẫu

Bài 1. Cho Parabol $(P): y^2 = 8x$. Viết phương trình tiếp tuyến với (P) biết:

a. Tại điểm M(2; –4).

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: 2x – y + 5 = 0.

c. Tiếp tuyến đi qua điểm M(–3; 0)

Giải

a. Ta có: $M \in (P)$ nên phương trình tiếp tuyến với (P) tại M:

$$-4y = 4(x + 2) \Leftrightarrow y = -x - 2$$

b. Gọi Δ là đường thẳng song song với đường thẳng d: 2x – y + 5 = 0 nên phương trình có dạng: $2x - y + C = 0$

Δ là tiếp tuyến với (P) thì $4(-1)^2 = 2.2C \Leftrightarrow C = 1$ nên: $\Delta: 2x - y + 1 = 0$

c. Đường thẳng Δ đi qua điểm M, phương trình có dạng: $Ax + By + 3A = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$

Δ là tiếp tuyến với (P) thì $4B^2 = 2A.3A \Leftrightarrow 2B^2 = 3A^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}A \\ B = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}A \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng $\Delta : 2x \pm y\sqrt{6} + 6 = 0$

Cách khác (Sử dụng phương pháp đạo hàm)

a. Ta có: $(P): y^2 = 8x$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến x, ta có:

$2yy' = 8 \Rightarrow y' = \dfrac{8}{2y} = \dfrac{4}{y}$ và $y'(2) = \dfrac{4}{y(2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$.

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại M:

$y = y'(2)(x-2) - 4 = -(x-2) - 4 \Leftrightarrow y = -x - 2$

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: 2x – y + 5 = 0 có hệ số góc k = 2

Gọi $M(x; y) \in (P)$ là tọa độ tiếp điểm, ta có

$y' = \dfrac{4}{y} = 2 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow 8x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + 2 \Leftrightarrow y = 2x + 1$

Bài 2. Cho Parabol $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ và điểm $A\left(\dfrac{15}{8}; \dfrac{27}{8}\right)$

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ và vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

b. Tìm điểm B ∈(P) sao cho AB vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại B.

Giải

a. Ta có: $\Rightarrow y' = x$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k = y'(-1) = -1$. Đường thẳng d đi qua M và vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M có hệ số góc $k_1 = 1$.

Phương trình đường thẳng d: $2x - 2y + 3 = 0$

b. Gọi $B(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = \dfrac{x_0^2}{2}$. Đường thẳng d tiếp xúc với (P) tại B có hệ số góc $k = y'(x_0) = x_0$ nên có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{d} = (1; x_0)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(x_0-\frac{15}{8};y_0-\frac{27}{8}\right)$ và

$$AB\perp d\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{d}=0\Leftrightarrow x_0-\frac{15}{8}+x_0\left(y_0-\frac{27}{8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x_0-\frac{15}{8}+x_0\left(\frac{x_0^2}{2}-\frac{27}{8}\right)=0\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)\left(x_0^2-4x_0-15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=-1;y_0=\frac{1}{2};x_0=-\frac{3}{2};y_0=\frac{9}{8}\\ x_0=\frac{5}{2};y_0=\frac{25}{8}\end{array}\right.$$

Tọa độ điểm B là: $B_1\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{8}\right)$; $B_2\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $B_3\left(\frac{5}{2};\frac{25}{8}\right)$

Bài 3. Cho parabol $(P):y^2=4x$ và điểm N thuộc đường chuẩn của (P). Chứng minh rằng từ N kẻ được hai tiếp tuyến với (P) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Gọi T_1, T_2 là hai tiếp điểm, chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Ta có: parabol $(P):y^2=4x$ nên tham số tiêu p = 2.

Đường chuẩn $\Delta:x=-1$ và tiêu điểm F(1;0)

Gọi N(−1; a) ∈Δ, đường thẳng d đi qua N có hệ số góc k: $y=k(x+1)+a$

d là tiếp tuyến của (P) thì: $2(-1)^2=2k(k+a)\Leftrightarrow k^2+ka-1=0$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 và $k_1k_2=-1$ nên từ N luôn kẻ được hai tiếp tuyến với (P) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi T_1 là tiếp điểm của tiếp tuyến $d_1:y=k_1(x+1)+a$ với (P) có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=k_1(x+1)+a\\ y^2=4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k_1y^2-4y+4(k_1+a)=0\\ x=\frac{y^2}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(y-\frac{2}{k_1}\right)^2=0\\ a=\frac{1}{k_1}-k_1;x=\frac{y^2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\frac{2}{k_1}\\ x=\frac{1}{k_1^2}\end{cases}$$

Gọi T_2 là tiếp điểm của tiếp tuyến $d_2: y = k_2(x+1)+a$ với (P) có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = k_2(x+1)+a \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2y^2 - 4y + 4(k_2+a) = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \dfrac{2}{k_2}\right)^2 = 0 \\ a = \dfrac{1}{k_2} - k_2; x = \dfrac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{k_2} \\ x = \dfrac{1}{k_2^2} \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{FT_1} = \left(\dfrac{1}{k_1^2} - 1; \dfrac{1}{k_1}\right); \overrightarrow{FT_2} = \left(\dfrac{1}{k_2^2} - 1; \dfrac{1}{k_2}\right)$ và $k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$

nên $\overrightarrow{FT_2} = \left(k_1^2 - 1; -k_1\right) \Rightarrow \overrightarrow{FT_2} = -k_1^2\overrightarrow{FT_1}$.

Suy ra đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định F.

Bài 4. Cho parabol $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ đường thẳng $d: 2mx - 2y + 1 = 0$.

a. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm m để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

b. Tính góc tạo bởi các tiếp tuyến tại M, N của (P)

Giải

a. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 2mx - 2y + 1 = 0 \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + \dfrac{1}{2} \\ x^2 - 2mx - 1 = 0 \end{cases}$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M\left(x_1; mx_1 + \dfrac{1}{2}\right); N\left(x_2; mx_2 + \dfrac{1}{2}\right)$

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + m^2)}$$

$$MN^2 = (1+m^2)\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = (1+m^2)\left[(2m)^2 - 4(-1)\right] = 4(1+m^2)^2 \geq 4$$

Đoạn thẳng MN ngắn nhất khi m = 0.

b. Hệ số góc của tiếp tuyến với (P) tại M, N lần lượt là: $y'(x_1); y'(x_2)$ và $y'(x_1).y'(x_2) = x_1x_2 = -1$ nên góc tạo bởi các tiếp tuyến tại M, N của (P) bằng 90^0

Bài 5. Cho parabol $(P): y^2 = 8x$ và đường thẳng d: $mx - y - 2m = 0$. Gọi A, B là các giao điểm của (P) và d. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của (P)

Giải

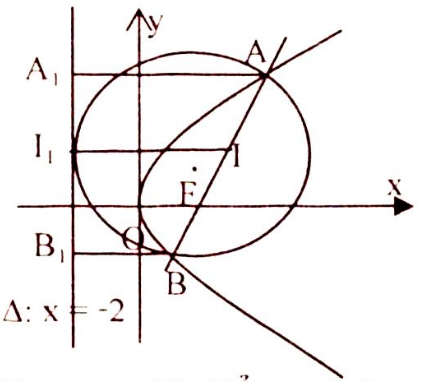
Phương trình đường thẳng $d: m(x-2) - y = 0$ luôn đi qua điểm cố định F(2; 0) với mọi m chính là tiêu điểm của (P).

Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB và A_1, I_1, B_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, I, B lên đường chuẩn $\Delta: x = -2$

Ta có: $A_1A = AF$ và $B_1B = BF$

và $II_1 = \dfrac{A_1A + B_1B}{2} = \dfrac{AF + FB}{2} = \dfrac{AB}{2}$

Suy ra đường chuẩn $\Delta: x = -2$ luôn tiếp xúc với đường tròn, đường kính AB.



Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến Parabol (Tìm tọa độ điểm, chứng minh, tính độ dài)

Bài 1. (Khối D–2008) Cho parabol $(P): y^2 = 16x$ và điểm $A(1;4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B, C khác A) di động trên (P) sao cho $\widehat{BAC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi $B\left(\dfrac{b^2}{16}; b\right); C\left(\dfrac{c^2}{16}; c\right) \in (P)$ với b, c ≠ 4, b ≠ c và

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{b^2}{16} - 1; b - 4\right); \overrightarrow{AC} = \left(\frac{c^2}{16} - 1; c - 4\right)$$

Ta có: $\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{16} - 1\right)\left(\frac{c^2}{16} - 1\right) + (b-4)(c-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b^2 - 16}{16}\right)\left(\frac{c^2 - 16}{16}\right) + (b-4)(c-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-4)(c-4)\left[\frac{(b+4)(c+4)}{16^2} + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+4)(c+4)+256=0 \Leftrightarrow b+c=-\left(68+\frac{bc}{4}\right)$$

Mặt khác: $\overrightarrow{BC}=\left(\frac{c^2}{16}-\frac{b^2}{16};c-b\right)//\vec{d}=(c+b;16)$ nên phương trình đường thẳng BC:

$$16x-(c+b)y+cb=0 \Leftrightarrow 16x+\left(68+\frac{cb}{4}\right)y+cb=0$$

Gọi $M(x_0;y_0)\in BC$ với mọi bc.

Suy ra phương trình: $cb\left(1+\frac{y_0}{4}\right)+16x_0+68y_0=0$ có nghiệm với mọi bc

nên $\begin{cases}1+\frac{y_0}{4}=0\\16x_0+68y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_0=-4\\x_0=17\end{cases}$.

Vậy đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định M(17; –4).

Bài 2. Cho parabol $(P): y^2=2px$ và đường thẳng d đi qua tiêu điểm F cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ A, B đến trục của (P) là một đại lượng không đổi.

Giải

Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường thẳng d đi qua tiêu điểm F : $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k ≠ 0.

Xét phương trình: $ky^2-2py-kp^2=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 với k ≠ 0 lần lượt là tung độ của A, B.

$d(A,Ox)=|y_1|;d(B,Ox)=|y_2|\Rightarrow d(A,Ox).d(B,Ox)=|y_1||y_2|$

$=|y_1y_2|=|-p^2|=p^2$

Bài 3. Cho parabol $(P): y^2=2x$ và đường thẳng d: x – y + 2 = 0. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa d và (P)

Giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x-y+2=0\\y^2=2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y-2\\y^2-2y+4=0\end{cases} \Rightarrow x,y\in\varnothing$ nên d không cắt (P).

Gọi Δ là đường thẳng song song với d nên phương trình $\Delta: x-y+C=0$

Δ tiếp xúc với (P) khi: $pB^2 = 2AC \Leftrightarrow 1.(-1)^2 = 2.1.C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

Phương trình đường thẳng $\Delta: 2x - 2y + 1 = 0$

Khoảng cách ngắn nhất giữa d và (P) bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song d và Δ

Nên $d(\Delta, d) = \begin{cases} M\left(\frac{1}{2};1\right) \in \Delta \\ d(M,d) \end{cases} = d(M,d) = \frac{\left|\frac{1}{2} - 1 + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Bài 4. Cho parabol $(P): y^2 = 2x$ và hai điểm $A(2;-2), B(8;4)$ thuộc (P). Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ AB. Tìm M để diện tích tam giác AMB lớn nhất

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6;6) // \vec{d} = (1;1), AB = 6\sqrt{2}$.

Gọi M thuộc cung nhỏ AB và $h = d(M, AB)$

$dt(\Delta AMB) = \frac{1}{2}h.AB = 3\sqrt{2}h$ nên diện tích tam giác AMB lớn nhất khi h lớn nhất.

Suy ra: $h = d(\Delta, AB)$ với Δ song song với AB và tiếp xúc với (P)

Phương trình đường thẳng $\Delta: 2x + 2y + 1 = 0$ và M là tiếp điểm của đường thẳng Δ và (P)

Tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{(2y+1)}{2} \\ y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};-1\right)$$

Bài 5. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Viết phương trình các cạnh của một tam giác nội tiếp (P)(Tam giác có ba đỉnh nằm trên (P)), biết một đỉnh của tam giác trùng với đỉnh của (P) và trực tâm của tam giác trùng với tiêu điểm của (P)

Giải

Gọi ba đỉnh của tam giác là O, $O(0;0); A\left(\frac{a^2}{4};a\right); B\left(\frac{b^2}{4};b\right)$ với a, b ≠ 0 và a ≠ b

Tiêu điểm của parabol là $F(1;0)$ và $\overrightarrow{FA}\left(\frac{a^2}{4}-1;a\right);\overrightarrow{FB}=\left(\frac{b^2}{4}-1;b\right)$

Ta có F là trực tâm ΔOAB nên

$$\begin{cases}FA\perp OB\\ FB\perp OA\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{FA}\perp\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{OA}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{OB}=0\\ \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{OA}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{a^2}{4}-1\right)\frac{b^2}{4}+ab=0\\ \left(\frac{b^2}{4}-1\right)\frac{a^2}{4}+ab=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2\\ a^4-4a^2+16ab=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-a\\ a^4-20a^2=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\sqrt{5};b=-2\sqrt{5}\\ a=-2\sqrt{5};b=2\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng chứa các cạnh của ΔOAB:

$$y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x \text{ và } x-5=0$$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Viết phương trình của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. Tiêu điểm F(4; 2) và đường chuẩn là trục Ox

b. Tiêu điểm F(1; −1) và đường chuẩn có phương trình: y − 1 = 0

Bài 2. Viết phương trình của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. Đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{2}{3}$ và tiếp xúc với đường thẳng $y=\frac{4}{3}$

b. Đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-x+9}{x-1}$ và tiếp xúc với đường thẳng $d:2x-y-10=0$

Bài 3. Cho parabol $(P):y^2=16x$. Viết các phương trình tiếp tuyến với (P) biết

a. Tiếp tuyến đi qua điểm A(1; −4).

b. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: 2x − y + 5 = 0

Bài 4. Cho parabol $(P):y^2=4x$ và hai đường thẳng $d_1:m^2x+my+1=0$, $d_2:x-my+m^2=0$ với $m\neq 0$.

a. Chứng minh rằng d_1, d_2 vuông góc với nhau và giao điểm của d_1 và d_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định.

b. Chứng minh rằng d_1, d_2 luôn tiếp xúc với (P) lần lượt tại A, B và đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định

Bài 5. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng d đi qua tiêu điểm F cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ A, B đến trục của (P) là một đại lượng không đổi.

Bài 6. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + 3$ và đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho đoạn thẳng AB = 10.

Bài 7. Cho parabol $(P): y^2 = 8x$ và điểm I(2; 4) thuộc (P). Xét góc vuông thay đổi quay quanh I và hai cạnh góc vuông cắt (P) tại hai điểm M, N khác I. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 8. Cho parabol (P) có đỉnh ở gốc tọa độ, đi qua điểm $A(2;2\sqrt{2})$ và nhận trục hoành làm trục đối xứng. Đường thẳng d đi qua điểm $I\left(\frac{5}{2};1\right)$ cắt (P) tại hai điểm M, N sao cho IM = IN. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Bài 9. Cho parabol $(P): y^2 = 2x$ và điểm I(0; 2). Viết phương trình đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$

Bài 10. Cho parabol $(P): y^2 = x$ và hai điểm $A(1;-1)$, $B(9;3)$ thuộc (P). Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ AB. Tìm M để diện tích tam giác AMB lớn nhất

Bài 11. Cho parabol $(P): y^2 = 16x$. Gọi M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc với đường chuẩn Δ của (P). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 12. Cho parabol $(P): y^2 = 64x$ và đường thẳng $d: 4x + 3y + 46 = 0$. Gọi M, N theo thứ tự thuộc (P), d. Xác định M, N để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Hướng dẫn giải

Bài 1. a. Ta có: $(P) = \{M : MF = d(M,\Delta)\}$ nên gọi

$M(x;y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M,\Delta)$

$FM = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$ và $d(M,\text{Ox}) = |y|$ nên

$$MF = d(M,\Delta) \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4} - 2x + 5.$$

Phương trình parabol (P): $y = \frac{x^2}{4} - 2x + 5$

b. Phương trình parabol (P): $y = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}$

Bài 2. a. Phương trình parabol (P): $y = -x^2 - 2x + 1$ b. $y = x^2 - 9$

Bài 3. a. Phương trình tiếp tuyến: 2x + y + 2 = 0 b. x + 2y + 16 = 0

Bài 4. a. Véc tơ pháp tuyến của d₁, d₂ là: $\overrightarrow{n_1} = (m^2; m)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1; -m)$ và $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$

Gọi M là giao điểm của d₁ và d₂, xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} m^2x + my + 1 = 0 \\ x - my + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2+1)(x+1) = 0 \\ x - my + m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = 0.$$

Suy ra M thuộc đường thẳng x + 1 = 0 là đường chuẩn của parabol $(P): y^2 = 4x$

b. Parabol $(P): y^2 = 4x$ có tham số tiêu p = 2. Đường chuẩn $\Delta: x = -1$ và tiêu điểm F(1;0)

Xét: $2m^2 = 2m^2.1 \Rightarrow pB^2 = 2AC$ với mọi m nên d₁ tiếp xúc với (P)

$2(-m)^2 = 2.1.m^2 \Rightarrow pB^2 = 2AC$ với mọi m nên d₂ tiếp xúc với (P)

Gọi A là tiếp điểm của tiếp tuyến $d_1: m^2x + my + 1 = 0$ với (P) có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} m^2x + my + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{my}{2} + 1\right)^2 = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{m} \\ x = \dfrac{1}{m^2} \end{cases}$$

Gọi B là tiếp điểm của tiếp tuyến $d_2: x - my + m^2 = 0$ với (P) có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - my + m^2 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{2} - m\right)^2 = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2m \\ x = m^2 \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{FA} = \left(\dfrac{1}{m^2} - 1; -\dfrac{2}{m}\right); \overrightarrow{FB} = \left(m^2 - 1; 2m\right) \Rightarrow \overrightarrow{FB} = -m^2\overrightarrow{FA} \Rightarrow \overrightarrow{FB} // \overrightarrow{FA}$.

Suy ra đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định F.

Bài 5. $d(A, \mathrm{Ox}).d(B, \mathrm{Ox}) = p^2 = 4$

Bài 6. Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $2x - y + C = 0 \Leftrightarrow y = 2x + C$

Xét phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 2x + C \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - C = 0$ (1) và $\Delta' = C + 1 > 0 \Leftrightarrow C > -1$. Gọi x₁, x₂ là hai nghiệm của (1).

Ta có: $A(x_1; 2x_1 + C); B(x_2; 2x_2 + C) \Rightarrow AB = \sqrt{5(x_2 - x_1)^2}$

$AB = 10 \Leftrightarrow \sqrt{5(x_2 - x_1)^2} = 10 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1 = 20$

$\Leftrightarrow 16 - 4(3 - C) = 20 \Leftrightarrow C = 4$.

Phương trình đường thẳng Δ: $2x - y + 4 = 0$

Bài 7. Gọi $M\left(\frac{m^2}{8};m\right);\ N\left(\frac{n^2}{8};n\right) \in (P)$ với m, n ≠ 4, m ≠ n và

$$\overrightarrow{IM} = \left(\frac{m^2}{8}-2;m-4\right);\ \overrightarrow{IN} = \left(\frac{n^2}{8}-2;n-4\right)$$

Ta có: $\widehat{MIN} = 90^0 \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{8}-2\right)\left(\frac{n^2}{8}-2\right)+(m-4)(n-4)=0$

$$\Leftrightarrow (m-4)(n-4)\left[\frac{(m+4)(n+4)}{64}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (m+4)(n+4)+64=0 \Leftrightarrow m+n=-\left(20+\frac{mn}{4}\right)$$

Mặt khác: $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{n^2}{8}-\frac{m^2}{8};n-m\right) // \vec{d} = (n+m;8)$

Phương trình đường thẳng MN: $8x+\left(20+\frac{mn}{4}\right)y+mn=0$.

Gọi $M(x_0;y_0) \in MN$ với mọi mn

Suy ra phương trình: $mn\left(1+\frac{y_0}{4}\right)+8x_0+20y_0=0$ có nghiệm với mọi mn

nên $\begin{cases} 1+\frac{y_0}{4}=0 \\ 8x_0+20y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-4 \\ x_0=10 \end{cases}$.

Đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định M(10;–4).

Bài 8. Phương trình chính tắc parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng d đi qua I cắt (P) tại hai điểm M, N sao cho IM = IN có phương trình là: $y = k\left(x-\frac{5}{2}\right)+1$

Xét $\begin{cases} y = k\left(x-\frac{5}{2}\right)+1 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ky^2-4y+4-10k=0 \quad (*) \\ x=\frac{y^2}{4} \end{cases}$.

Đường thẳng d các (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt y_1; y_2. Suy ra: $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta' = 10k^2-4k+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow k \neq 0$.

Khi đó: $M\left(\dfrac{y_1^2}{4};y_1\right);N\left(\dfrac{y_2^2}{4};y_2\right)$ và IM = IN nên

$$\begin{cases}\dfrac{y_1^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{4}=5\\ y_1+y_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=20\\ y_1+y_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1y_2=-8\\ y_1+y_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4-10k}{k}=-8\\ \dfrac{4}{k}=2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow k=2$

Phương trình đường thẳng d: $y=2x-4$

Bài 9. Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{2};m\right);N\left(\dfrac{n^2}{2};n\right)\in(P)$ và m ≠ n.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{m^2}{2};m-2\right);\overrightarrow{IN}=\left(\dfrac{n^2}{2};n-2\right)$

$$\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m^2}{2}=4.\dfrac{n^2}{2}\\ m-2=4(n-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2n)(m+2n)=0\\ m=4n-6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6;n=3\\ m=-2;n=1\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng d: 2x – 9y + 18 = 0 hoặc 2x + y – 2 = 0

Bài 10. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(8;4)//\vec{d}=(2;1)$, $AB=4\sqrt{5}$. Gọi M thuộc cung nhỏ AB và $h=d(M,AB)$

$dt(\Delta AMB)=\dfrac{1}{2}h.AB=2\sqrt{5}h$ nên diện tích tam giác AMB lớn nhất khi h lớn nhất.

Suy ra: $h=d(\Delta,AB)$ với Δ song song với AB và tiếp xúc với (P)

Phương trình đường thẳng $\Delta:x-2y+1=0$ và M là tiếp điểm của đường thẳng Δ và (P)

Tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\ y^2=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-1\\ y^2-2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}, \text{ nên } M(1;1)$$

Bài 11. Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{16};m\right);N\left(\dfrac{n^2}{16};n\right)\in(P)$ và m ≠ n.

Đường tròn đường kính MN có tâm $I\left(\dfrac{m^2+n^2}{32};\dfrac{m+n}{2}\right)$

và bán kính $R=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{\sqrt{(n-m)^2(n+m)^2+256(n-m)^2}}{32}$

Phương trình đường chuẩn $\Delta : x + 4 = 0$

Đường chuẩn Δ tiếp xúc với đường tròn đường kính MN nên

$$d\left(I,\Delta\right) = R = \frac{MN}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + n^2 + 128}{32} = \frac{\sqrt{\left(n-m\right)^2\left(n+m\right)^2 + 256\left(n-m\right)^2}}{32}$$

$$\Leftrightarrow m^2n^2 + 128mn + 4096 = 0 \Leftrightarrow mn = -64$$

Khi đó $M\left(\frac{m^2}{16}; m\right); N\left(\frac{256}{m^2}; -\frac{64}{m}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{d} = \left(64 - m^2; -16m\right)$

Phương trình đường thẳng MN: $16mx + (64 - m^2)y - 64m = 0$ (*).

Thay tọa độ tiêu điểm F(4; 0) và phương trình (*), ta có:

$16m.4 + (64 - m^2).0 - 64m = 64m - 64m = 0 \Rightarrow F \in MN$

Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 12. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 46 = 0 \\ y^2 = 64x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 48y + 736 = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 24)^2 + 160 = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{64} \end{cases} \Leftrightarrow x, y \in \varnothing$$

Đường thẳng d không cắt (P).

Ta có: M ∈ (P) và N∈ d sao cho đoạn thẳng MN ngắn nhất nên M là tiếp điểm của tiếp tuyến Δ với (P), Δ song song với d và N là hình chiếu vuông góc của M lên d.

Gọi Δ song song với d, phương trình dạng: $4x + 3y + C = 0$ và Δ tiếp xúc với (P) nên $pB^2 = 2AC \Rightarrow 32.9 = 2.4.C \Leftrightarrow C = 36$

Phương trình đường thẳng $\Delta : 4x + 3y + 32 = 0$ và tọa độ tiếp điểm của Δ với (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 36 = 0 \\ y^2 = 64x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 48y + 576 = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 24)^2 = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -24 \end{cases}$$

Nên M(9; −24).

Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với d có phương trình:

$3x - 4y - 123 = 0$

$$N = d_1 \cap d \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 123 = 0 \\ 4x + 3y + 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{37}{5} \\ y = -\dfrac{126}{5} \end{cases} \text{ nên } N\left(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5}\right)$$

MỤC LỤC

§1. Các khái niệm cơ bản 5

§2. Tìm tọa độ của một điểm, một véctơ 8

§3. Phương trình đường thẳng 25

§4. Đường tròn 83

§5. Elip 110

§6. Hypebol 131

§7. Parabol 150